

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Е. С. ДЕХТЯРЮК, С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 XI 1972)

В работах В. А. Кондратьева и одного из авторов ⁽¹⁾ изучалась единственность слабого решения задачи Коши для системы вида

$$\mathcal{L}u \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k| \leq m} D_x^k [a_k(t, x) \cdot u(t, x)] \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + Pu = 0, \quad (1)$$

коэффициенты $a_k(t, x)$ удовлетворяют неравенству

$$|a_k(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{(m-|k|)/(m-1)}.$$

При этом устанавливалось, что если $u(t, x)$ — непрерывное в $\bar{P}_T = [0, T] \times R^n$ слабое положительное (в смысле конуса K ⁽¹⁾) решение системы (1), удовлетворяющее неравенству *

$$\|u(t, x)\|_{\Pi_{(0, T)}^{1, x^0}} \leq C_1 \exp\{C_2 |x^0|^{m'}\}, \quad m' = m/(m-1),$$

то из $u(0, x) = 0$ вытекает, что $u(t, x) \equiv 0$ в слое $\bar{P}_T$.

Доказательство было основано на построении специального суперрешения сопряженной к (1) системы и получения с помощью его априорной оценки положительной части решения.

В настоящей работе мы, существенно используя методику ⁽¹⁾, устанавливаем общие асимптотические теоремы единственности слабых положительных решений системы (1), определенных в полупространстве $\Pi_\infty = \Pi^+$. Под асимптотическими теоремами единственности мы понимаем, так же как в ^(2, 3), предложения, в которых указывается, при каких $M(x)$ и $L(t)$ решения, удовлетворяющие неравенству

$$|u(t, x)| \leq \exp\{-L(t) + M(x)\},$$

тождественно равны нулю. Заметим, что классические теоремы единственности решения задачи Коши соответствуют решениям, тождественно равным нулю, начиная с некоторого t . Попутно получаются широкие обобщения приведенной выше теоремы единственности решения задачи Коши.

* Здесь и ниже приняты такие обозначения: $\Pi_{(T_1, T_2)}^{0, x^0}$ — параллелепипед $\{(t, x) : T_1 \leq t \leq T_2, |x_j - x_j^0| < a, j = 1, 2, \dots, n\}$; $\Sigma_a^{x^0}$ — куб $\{|x_j - x_j^0| < a, j = 1, 2, \dots, n\}$;
 $\Pi_{(T_1, T_2)}^a = \Pi_{(T_1, T_2)}^{a, 0}$; $\Pi_{(T_1, T_2)}^{\infty} = \Pi_{(T_1, T_2)}^\infty$; $\Sigma_a = \Sigma_a^b$; $\Sigma = \Sigma_\infty$; $\|u\|_{\Pi_{(T_1, T_2)}^{a, x^0}} =$
 $= \iint_{\Pi_{(T_1, T_2)}^{a, x^0}} |u(t, x)| dt dx$; $\|u\|_{\Sigma_1^x} = \int_{\Sigma_1^x} |u(t, x)| dx$.

1. Приведем два определения, необходимых для формулировки основных результатов.

Определение 1. Функция $A(z)$ называется характеристикой роста, если она определена на $[1, \infty)$, положительна, имеет производные до порядка $m-1$ и удовлетворяет условиям

$$1) B(\infty) = \int_1^{\infty} \frac{d\xi}{A(\xi)} = \infty,$$

$$2) \left| \frac{d^k}{dz^k} A(z) \right| \leq M z^{1-k} B(z), k = 0, 1, \dots, m-1, B(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{A(\xi)}.$$

Определение 2. Система (1) принадлежит классу $(A; \gamma)$, если

$$|a_k(t, x)| \leq L A(r)^{|k|} B(r)^{\gamma(m-|k|)/(m-1)}, \quad r^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 + \sqrt{n} + 2. \quad (2)$$

Заметим, что характеристиками роста являются функции z^α , $\alpha \in [0, 1]$; $z \ln^\alpha z$, $\alpha \in [0, 1/2]$.

2. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть система (1) принадлежит классу $(A, 1)$. Если $u(t, x)$ — слабое положительное непрерывное решение системы (1), удовлетворяющее неравенству

$$\|u(t, x)\|_{\Pi_{(0, T)}^{2, x^0}} \leq C \exp\{c B^{m'}(r^0)\}, \quad (3)$$

то из того, что $u(0, x) \equiv 0$, следует $u(t, x) \equiv 0$ в $\bar{\Pi}_T$.

В случае, когда P — равномерно эллиптический оператор, неравенство (2) излишне.

Приведем две асимптотические теоремы единственности.

Теорема 2. Пусть система (1) принадлежит классу (A, γ) с некоторым $\gamma \in [0, (s-1)/(m'-1)]$, где s — некоторое число из интервала $(1, m')$. Если $u(t, x)$ — слабое положительное непрерывное решение системы (1) в Π^+ , удовлетворяющее неравенству

$$\|u(t, x)\|_{\Pi_{(t_0-1, t_0+1)}^{2, x^0}} \leq C \exp\{B^s(r^0) - M t_0^s (m'-1)/(m'-s)\}, \quad M > 0,$$

то $u(t, x) \equiv 0$.

Теорема 3. Пусть система (1) принадлежит классу (A, γ) с некоторым $\gamma \in ((s-1)/(m'-1), 1)$, где s — некоторое число из интервала $(1, m')$. Если $u(t, x)$ — слабое непрерывное положительное решение системы (1) в Π^+ , удовлетворяющее неравенству

$$\|u(t, x)\|_{\Pi_{(t_0-1, t_0+1)}^{2, x^0}} \leq C \exp\{B^s(r^0) - M t_0^{1+\gamma m'/(1-\gamma)}\}, \quad M > 0,$$

то $u(t, x) \equiv 0$.

Теорема 1 установлена нами при дополнительном предположении, что функция $A(z)$, определяющая класс $(A, 1)$, удовлетворяет условию

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z (\ln z)^{1-1/(m'-\epsilon)}}{A(z)} > 1$, а теоремы 2 и 3 — в предположении, что

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z (\ln z)^{1-1/s}}{A(z)} > 1$. Такие дополнительные предположения представля-

ются нам существенными при исследовании условий единственности и асимптотической единственности в классе растущих по пространственным координатам функций.

3. Доказательство теорем 2 и 3. Рассмотрим слабое решение системы, удовлетворяющее условию

$$\|u(t, x)\|_{\Pi_{(t_0-1, t_0+1)}^{2, x_0}} \leq \exp\{B^s(r^0) - L(t_0)\}, \quad s > m; \quad t_0 > 1, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = +\infty.$$

Введем вспомогательную функцию

$$w(t, x) = \exp\left\{-\frac{B^{m'}(r) + (1 + Qt)^{m'/(1-\gamma)}}{(1 + Qt)^{m'-1}}\right\}, \quad (5)$$

где Q — положительная постоянная, которую мы выбираем позже. Полу-прямую $t \in [0, \infty)$ разобьем на интервалы $(0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{N-1}, t_N)$.

В каждой полосе $\Pi_{(t_{k-1}, t_k)}$ определим вектор-функцию

$$\varphi_k(t, x) = (t - t_{k-1})w(t, x)e_1,$$

$$\psi_k(t, x) = (t_k - t)w(t, x)e_2.$$

Вектор e_1 определяется конусом K ⁽¹⁾ и выбирается таким, что для любого $u \in K$

$$\operatorname{Re}(e_1, u) \geq \gamma_0 |u|,$$

где γ_0 — положительная константа, не зависящая от u ; у вектора e_2 все координаты равны 1.

Для $u \in K$ при достаточно большом Q

$$\operatorname{Re}(\mathcal{L}^*\varphi_l, u) \geq [1 - C_2 t_l^{\gamma m'/(1-\gamma)}(t_l - t_{l-1})] \gamma_0 |u| w. \quad (6)$$

Определим последовательность t_N равенствами

$$t_N - t_{N-1} = \frac{(1 - \gamma)^{1/2}}{\sqrt{2C_2}(1 + \gamma m' - \gamma)^{1/2}} \frac{1}{\frac{\gamma m'}{N^{1+\gamma m' - \gamma}}}, \quad t_0 = 0,$$

где C_2 — положительная константа из неравенства (6).

t_N удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2C_2}} \frac{(1 - \gamma)^{1/2}}{(1 + \gamma m' - \gamma)^{1/2}} (N^{(1-\gamma)/(1+\gamma m'-1)} - 1) &\leq t_N \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2C_2}} \frac{(1 - \gamma)^{1/2}}{(1 + \gamma m' - \gamma)^{1/2}} N^{(1-\gamma)/(1+\gamma m'-\gamma)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда $C_2 t_N^{\gamma m'/(1-\gamma)}(t_N - t_{N-1}) \leq 1/2$.

Из соотношения (6) получаем

$$\gamma_1 |u| w \leq \operatorname{Re}(\mathcal{L}^*\varphi_l, u), \quad (8)$$

где γ_1 — положительная константа, не зависящая от l .

Проведя оценки сверху и используя условия на $a_k(t, x)$, получаем

$$|(\mathcal{L}^*\psi_l, u)| \leq \gamma_2 |u| w, \quad (9)$$

где γ_2 — положительная константа, не зависящая от l .

Используя предположение (4) и L_1 -типоэллиптичность уравнения (1) по временной координате t , с помощью рассуждений, сходных с рассуждениями ⁽⁴⁾, стр. 418, приходим к основному тождеству

$$\iint_{\Pi_{(t_{l-1}, t_l)}} (\mathcal{L}^*\varphi_l, u) dt dx = \int_{\Sigma} (\varphi_l, u)|_{t=t_l} dx. \quad (10)$$

При этом предполагается, что $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{z(\ln z)^{1-q}}{A(z)} > 1, q > \frac{1}{m'}$.

Из (10), (8) получаем

$$\gamma_1 \iint_{\Pi(t_{l-1}, t_l)} w |u| dt dx \leq \iint_{\Pi(t_{l-1}, t_l)} w(t_l, x) |u_l(t, x)| dx (t_l - t_{l-1}), \quad (11)$$

$$(t_{l+1} - t_l) \int_{\Sigma} w(t_l, x) |u(t_l, x)| dx \leq \gamma_2 \iint_{\Pi(t_l, t_{l+1})} w |u| dt dx. \quad (12)$$

Из (11), (12) находим

$$\iint_{\Pi(t_{l-1}, t_l)} w |u| dt dx \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{t_l - t_{l-1}}{t_{l+1} - t_l} \iint_{\Pi(t_l, t_{l+1})} w |u| dt dx. \quad (13)$$

Применяя неравенство (13) последовательно к слоям $\Pi_{(0, t_1)}$ и $\Pi_{(t_1, t_2)}$, $\Pi_{(t_2, t_3)}$, ..., $\Pi_{(t_{N-2}, t_{N-1})}$ и $\Pi_{(t_{N-1}, t_N)}$, получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{(0, t_1)}} w |u| dt dx &\leq \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{N-1} \frac{t_1}{t_N - t_{N-1}} \iint_{\Pi(t_{N-1}, t_N)} w |u| dt dx \leq \\ &\leq \frac{t_1}{\gamma_1} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{N-1} \int_{\Sigma} w(t_N, x) |u(t_N, x)| dx. \end{aligned}$$

Используя еще раз L -гипоэллиптичность системы (1) по временной координате t , можно оценить сверху интеграл $\int_{\Sigma} w(t_N, x) |u(t_N, x)| dx$ и с учетом условия на $u(t, x)$ прийти к неравенству

$$\iint_{\Pi_{(0, t_1)}} w |u| dt dx \leq A N e^{-L(t_{N-1})} \int_1^{\infty} r^{n-1} \exp \left\{ - \frac{B^{m'}(r)}{(1+Qt)^{m'-1}} + B^s(r+2\sqrt{n}) \right\} dr$$

при некотором постоянном $A > 1$.

Примем, что $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(\ln z)^{1-1/s}}{(Az)} > 1$, тогда

$$\iint_{\Pi_{(0, t_1)}} w |u| dt dx \leq A N e^{-L(t_{N-1})} \int_1^{\infty} \exp \left\{ - \frac{\xi^{m'}}{(1+Qt_N)^{m'-1}} + 2n\xi^s \right\} d\xi. \quad (14)$$

Используя методику, изложенную в ⁽⁴⁾, стр. 20, можно получить при достаточно больших N

$$\iint_{\Pi_{(0, t_1)}} w |u| dt dx \leq A_0 \exp(\alpha_1 N + \alpha_2 N^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma m'-\gamma} \frac{m'-1}{m'-s}} - L(\alpha_3 N^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma m'-\gamma}}), \quad (15)$$

где $A_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — некоторые положительные константы.

Из (7) и (15) вытекают утверждения теоремы 2 и 3.

Киевское высшее инженерное
радиотехническое училище
противовоздушной обороны

Поступило
26 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Кондратьев, С. Д. Эйдельман, Матем. сборн., 82 (123), 3 (1970).
² С. Д. Эйдельман, Параболические системы, «Наука», 1964. ³ Е. С. Дехтярюк, Доп. АН УРСР, № 2 (1969). ⁴ М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и пелые функции, М., 1962.