Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 2

УДК 513.88 **МАТЕМАТИКА**

А. П. ХРОМОВ

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 VI 1972)

1. В настоящей статье рассматривается вопрос о разложении по собственным и присоединенным элементам (с.п.э.) оператора

$$Af = Mf + \sum_{k=1}^{m} c_k(f) g_k, \tag{1}$$

где M — вольтерров оператор, действующий в банаховом пространстве B, $\{c_k(f)\}_{k=1}^m$ и $\{g_k\}_{k=1}^m$ — некоторые линейно независимые системы линейных функционалов и элементов в этом пространстве. Оператор M мы называем вольтерровым (другое название «квазинильпотентный» ([1]), стр. 621), если его спектральный радиус равен нулю, т. е., если $\lim\limits_{k\to\infty} \|M^k\|^{1/k} = 0$. Таким образом, речь идет о разложении по с.п.э. m-мерного возмущения вольтеррова оператора M. К рассматриваемой задаче сводятся, в частности, задача о разложении по собственным и присоединенным функциям обыкновенных дифференциальных (а также некоторых интегро-дифференциальных) уравнений с произвольными краевыми условиями, ряд задач о представлении аналитических функций рядами Дирихле и различные их обобщения. Отметим, что для рассматриваемого класса операторов резольвента $R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1}A$ (в терминологии ([2]), стр. 91, $R_\lambda(A)$ есть резольвента Фредгольма оператора A) может иметь экспоненциальный рост по λ по любому направлению. Среди дифференциальных операторов экспоненциальный рост резольвенты наблюдается, например, для дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями ([3]). Для этих операторов в ([3]) показано, что специфическим, причем существенным, обстоятельством является то, что разлагаемая функция есть операторно-аналитическая функция М. К. Фаге ([4]). Аналогичное обстоятельство имеет место и теперь: мы устанавливаем теоремы о разложении по с.п.э. в предположении, что разлагаемый элемент допускает представление в виде ряда по степеням оператора M, взятых на некоторых фиксированных элементах (в теореме 3 роль этого представления играет формула (2)).

2. Лемма 1. *Если λ не является характеристическим числом оператора A, то $R_\lambda(A)$ представляет собой всюду определенный и ограниченный оператор, причем справедлива формула*

$$R_\lambda(A)f = R_\lambda(M)f + \frac{1}{L(\lambda)} \sum_{j,\,k=1}^{m} g_j(\lambda) c_k((E-\lambda M)^{-1}f)\,\Delta_{k,\,j}(\lambda),$$

где $g_j(\lambda) = (E-\lambda M)^{-1}g_j$, $L(\lambda) = \det\|\delta_{k,\,j} - \lambda c_k(g_j(\lambda))\|_{k,j=1}^m$, $\Delta_{k,\,j}(\lambda)$ — *алгебраическое дополнение элемента* $\delta_{k,\,j} - \lambda c_k(g_j(\lambda))$ *в определителе* $L(\lambda)$ *и* $\delta_{k,\,j}$ — *символ Кронекера.*

Пусть Γ — какой-нибудь замкнутый контур в плоскости, не проходящий через характеристические числа оператора A. Тогда $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R_\lambda(A) f\,d\lambda$

представляет собой частную сумму ряда Фурье элемента f по тем с.п.э. оператора A, которые соответствуют характеристическим числам, попавшим внутрь Γ.

Наложим следующие требования:

1) $\|M^k\| = O\left(\left(\frac{\sigma e \rho}{k}\right)^{k/\rho}\right)$, где σ и ρ — некоторые положительные числа;

2) $g_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} M^j \psi_k$, где $\{\psi_k\}_{k=1}^m$ — некоторая линейно независимая система элементов из B, причем

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{k,j}| \left(\frac{(\sigma+\varepsilon) e\rho}{j}\right)^{j/\rho} < \infty, \quad \prod_{k=1}^{m} |a_{k,0}| > 0$$

(через ε обозначаем произвольное положительное число, которое можно считать сколь угодно малым);

3) типы целых по λ функций $c_k(g_j(\lambda))$ (соответственно $\Delta_{k,j}(\lambda)$) порядка ρ не превосходят σ_1 (соответственно σ_2);

4) существует система окружностей $\Gamma_q = \{\lambda: |\lambda| = r_q, \quad r_q \uparrow \infty\}$, $q = 1, 2, \ldots$, такая, что на ней выполняются асимптотические оценки

$$\ln |L(\lambda)| \geqslant (\gamma - \varepsilon) |\lambda|^\rho;$$

5) $\gamma > 0$, $\sigma_1 < \gamma$, $\sigma_2 < \gamma$.

Теорема 1. *Пусть в B введена полунорма $\|\cdot\|_1$ такая, что $\|M^j\psi_k\|_1 = O((\sigma_3 e\rho)/j)^{j/\rho}$, где $\sigma_3 < \sigma$ и $\sigma_2 + \sigma_3 < \gamma$.*

Тогда, если f такой элемент, что $f = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} M^j \psi_k$, причем $\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} |a_{k,j}| \left(\frac{(\sigma+\varepsilon) e\rho}{j}\right)^{j/\rho} < \infty$, то

$$\left\| f + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} R_\lambda(A) f\, d\lambda \right\|_1 = O(\exp(\sigma_2 + \sigma_3 - \gamma + \varepsilon) r_q^\rho).$$

При $n = 1$ теорема 1 является обобщением теоремы 2 А. Ф. Леонтьева из ([5]).

3. В этом пункте для некоторых классов интегральных операторов вида (1) установим более сильные результаты.

Пусть M есть интегральный вольтерров оператор $\int_0^x M(x,t) f(t)\, dt$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ядро $M(x, t)$ которого удовлетворяет условиям: $\frac{\partial^{i+j} M(x,t)}{\partial x^i \partial t^j}$, $i = 0, \ldots, n+2$; $j = 0, \ldots, n$; $n \geqslant 1$, непрерывны и $\frac{\partial^i}{\partial x^i} M(x,t)|_{t=x} = \delta_{i,n-1}$, $i = 0, \ldots, n$.

Лемма 2. *Пусть $M(x, t, \lambda)$ — ядро оператора $R_\lambda(M)$.*

Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} M(x, t, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^j}{dx^j} y_k(x, \mu) z_k(t, \mu) + O(\mu^{-n+j+1}), \; j = 0, \ldots, n-1,$$

где $\mu = (-\lambda)^{1/n} \left(\arg \mu \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right]\right)$, $\frac{d^j}{dx^j} y_k(x, \mu) = (\mu\omega_k)^j e^{\mu\omega_k x} [1 + O(\mu^{-1})]$, $z_k(t, \mu) = O(\mu^{-n+1} e^{-\mu\omega_k t})$, ω_k — *корни n-й степени из -1, занумерованные так, чтобы* $\operatorname{Re} \mu\omega_1 \geqslant \operatorname{Re} \mu\omega_2 \geqslant \ldots$, p *таково, что* $\operatorname{Re} \mu\omega_p > 0 \geqslant \geqslant \operatorname{Re} \mu\omega_{p+1}$.

Теорема 2. *Пусть* $g_k = g_k(x)$ *и* $c_k(f) = \int_0^1 f(t)\, v_k(t)\, dt$, $k = 1, \ldots, m$ — *линейно независимые системы функций из* $C[0, 1]$ *и функционалов в* $L[0, 1]$, *причем выполняются условия*: а) $v_k(t)$ *на отрезке* $[1-\delta, 1]$, $0 < \delta < 1$, n *раз непрерывно дифференцируемы и* $v_k^{(j)}(1) = \delta_{k, j+1}$, $j < k$; б) $g_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, *на* $[0, \delta]$ *представляют собой линейно независимую систему многочленов степеней* $\leqslant n-1$; в) $n > n - 2m > 2$.

Тогда, если $f \in L[0, 1]$ *и на полуинтервале* $[0, a]$, $0 < a \leqslant 1$, $f(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k, j} M^k \psi_j$, *где* $a_{k, j}$ *таковы, что* $\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k, j}|\, x^{kn} (kn)!^{-1} < \infty$ *при* $x \in [0, a]$, *то ряд Фурье функции* $f(x)$ *по с.п.э. оператора* A *сходится на* $[0, a]$ *к* $f(x)$ *по некоторой подпоследовательности частных сумм, причем на всяком отрезке* $[0, a_1] \subset [0, a]$ *сходимость равномерная.*

Теорема 2 является обобщением теоремы 3 из ([3]) о разложении по с.п.э. дифференциального оператора n-го порядка с нерегулярными распадающимися краевыми условиями (правда, в предположении, что число m краевых условий на одном из концов таково, что $n - 2m > 2$).

Лемма 3. *Справедливы следующие формулы:*

$$\mu^k M(x, t, \lambda) = -\frac{\delta_{k, n-1}}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \widetilde{\omega}_l \exp\,[\mu\widetilde{\omega}_l (x-t)] +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1} \int_0^{x-t} S_{l, k}(x, t, \eta)\, e^{\mu\widetilde{\omega}_l \eta} d\eta + \int_{\Gamma_{x-t}} T_k(x, t, \eta)\, e^{\mu\widetilde{\omega}_0 \eta} d\eta, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

где $\widetilde{\omega}_l = \exp \frac{2l+1}{n}\pi i$, $S_{l, k}(x, t, \eta)$ — *некоторые непрерывные функции по всем переменным при* $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant x - t$; $T_k(x, t, \eta)$ — *непрерывные функции при* $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$ *и всех комплексных* η, *причем* T_k *регулярны по* η *вне* Γ_{x-t} *и обращаются в нуль на бесконечности. Контур* Γ_x *есть граница правильного* n-*угольника* D_x *с центром в нуле и одной из вершин в точке* x. *Функции* $S_{l, k}$ *и* T_k *не зависят от* μ.

Теорема 3. *Пусть* $Af = Mf + g(x) \int_0^1 f(t) v(t)\, dt$, *где* $g(x) \in C[0, 1]$, $v(t) \in L[0, 1]$, *причем* $g(x)$, $v(1-x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[0, \delta]$, $0 < \delta < 1$, *причем* $g(0) v(1) \neq 0$.

Для того чтобы $f(x) \in L[0, 1]$ *разлагалось на* $[0, x_0]$, $0 < x_0 \leqslant 1$, *в ряд Фурье по с.п.э. оператора* A, *сходящийся равномерно на каждом отрезке* $[0, x_1]$ *из* $[0, x_0]$, *необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$f(x) = g(x) F(0) + \int_0^x S(x, \eta) F^{(n)}(\eta)\, d\eta + \int_{\Gamma_x} T(x, \eta) F^{(n)}(\eta)\, d\eta, \qquad (2)$$

где $F(z)$ — *функция, регулярная в* D_x, *причем* $F^{(kn+l)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$; $l = 1, \ldots, n-1$, $S(x, \eta)$ — *некоторая непрерывная функция по* x *и* η *при* $0 \leqslant \eta \leqslant x \leqslant 1$ *и* $T(x, \eta)$ — *непрерывная функция по* x *из* $[0, 1]$ *и всех комплексных* η, *причем* $T(x, \eta)$ *регулярна по* η *вне* Γ_x *и обращается в нуль на бесконечности (здесь* $n \geqslant 3$).

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
16 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы (общая теория), М., 1962. [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., 1965. [3] А. П. Хромов, Математич. сборн., **70** (112), 3, 310 (1966). [4] М. К. Фаге, Тр. Московск. матем. общ., **7**, 227 (1958). [5] А. Ф. Леонтьев, Матем. заметки, **1**, № 6, 689 (1967).