Доклады Академии наук СССР
1973. Том 221, № 2

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ДОБРЫНСКИЙ, А. Н. ШАРКОВСКИЙ

ТИПИЧНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ПОЧТИ ВСЕ ТРАЕКТОРИИ КОТОРЫХ УСТОЙЧИВЫ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

(*Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 13 XI 1972*)

Структурно устойчивые, или грубые, системы на двумерных многообразиях являются типичными (образуют множество второй категории по Бэру в пространстве систем) ([1]). Однако в больших размерностях ни грубые, ни выделенные позднее Ω-устойчивые системы не являются типичными ([2-4]). В ([5]) предложен еще один класс глобально устойчивых динамических систем, названных осуществимыми системами ([6]), типичность которых и доказывается ниже.

Над компактным C^m-многообразием M рассматривается метрическое (относительно C^k-нормы) пространство $\mathfrak{M}^k$ динамических систем, $0 \leqslant k \leqslant m$; предполагается, что динамические системы задаются C^k-отображениями S^t: $M \to M$, где $t \in G$ и под G подразумевается группа целых или вещественных чисел.

Пусть $S_x = \{S^t x,\ t \geqslant 0\}$ — траектория системы S, проходящая через точку x; $P_x^\eta = \overline{\bigcup_{\tilde{S} \in \mathfrak{U}_\eta(S)} \tilde{S}_x}$, $P_x = \bigcap_{\eta > 0} P_x^\eta$ — пролонгация траектории S_x по динамической системе. (Через $U_\eta(\ldots)$ и $\mathfrak{U}_\eta(\ldots)$ обозначаются η-окрестности множеств соответственно в пространстве M или $\mathfrak{M}$; символ $\mathfrak{M}$ употребляется вместо $\mathfrak{M}^k$, если k может быть любым.)

Как известно, траектория S_x называется устойчивой при постоянно действующих возмущениях (или осуществимой ([7])), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся η_1, $\eta_2 > 0$ такие, что $\tilde{S}_{\tilde{x}} \subset U_\varepsilon(S_x)$ как только $\tilde{x} \in U_{\eta_1}(x)$, $\tilde{S} \in \mathfrak{U}_{\eta_2}(S)$. Траектория S_x устойчива при постоянно действующих возмущениях тогда и только тогда, когда $P_x \subset U_\varepsilon(S_x)$ при любом $\varepsilon > 0$, так что $P_x = \overline{S}_x$.

Лемма. *Пусть $x \in M$, $S \in \mathfrak{M}$ и $P_x \subset U_\varepsilon(S_x)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда существуют η_1, $\eta_2 > 0$ такие, что $\tilde{P}_{\tilde{x}} \subset U_\varepsilon(\tilde{S}_{\tilde{x}})$ для любых $\tilde{x} \in U_{\eta_1}(x)$, $\tilde{S} \in \mathfrak{U}_{\eta_2}(S)$ (здесь и далее системы и их пролонгации индексируются одними и теми же значками).*

Доказательство опирается на компактность M, непрерывную зависимость отображения S^t от $x \in M$ и $S \in \mathfrak{M}$ и использует тот факт, что P_x^η при любом $\eta > 0$ (и произвольном k) содержит открытое в M подмножество.

Обозначим через $L = L(S)$ множество точек из M, принадлежащих устойчивым при постоянно действующих возмущениях траекториям системы S.

Теорема 1. *$L(S)$ есть множество типа G_δ для любой динамической системы $S \in \mathfrak{M}$.*

Определим множества L_ε, $\varepsilon > 0$: $x \in L_\varepsilon \Leftrightarrow$ *существует окрестность $U(x)$* точки x такая, что $P_{\tilde{x}} \subset U_\varepsilon(S_{\tilde{x}})$ для любой точки $\tilde{x} \in U(x)$. Множества L_ε открыты по определению. Утверждается, что $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{1/n}$.

Действительно, если $x \notin L$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $P_x \not\subset U_\varepsilon(S_x)$, т. е. $x \notin L_\varepsilon$. Предположим, что $x \in L$. Тогда $P_x \subset U_\varepsilon(S_x)$ при любом $\varepsilon > 0$. Согласно лемме, существует $\eta > 0$ такое, что $P_{\tilde{x}} \subset U_\varepsilon(S_{\tilde{x}})$ при любом $\tilde{x} \in U_\eta(x)$, а это означает, что $x \in L_\varepsilon$.

Оценка, даваемая этой теоремой, является точной: если динамическая система содержит так называемые грубые гомоклинические траектории, то L не является F_σ-множеством.

Пусть $\mathfrak{L}^0 = \{S \in \mathfrak{M}, L(S) = M\}$, т. е. $\mathfrak{L}^0$ — множество динамических систем, у которых все траектории устойчивы при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 2. *$\mathfrak{L}^0$ есть множество типа G_δ.*

Рассмотрим множества $\mathfrak{L}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$: $S \in \mathfrak{L}_\varepsilon \Leftrightarrow$ существует η-окрестность $\mathfrak{U}_\eta(S)$ системы S такая, что $\tilde{P}_x \subset U_\varepsilon(\tilde{S}_x)$ для всякой $x \in M$ и произвольной системы $\tilde{S} \in \mathfrak{U}_\eta(S)$. Множества $\mathfrak{L}_\varepsilon$ открыты по определению. Утверждается, что $\mathfrak{L}^0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{L}_{1/n}$.

Действительно, если $S \notin \mathfrak{L}^0$, то существует точка $x \in M$, не принадлежащая $L(S)$. Следовательно, существует и $\varepsilon > 0$ такое, что $P_x \not\subset U_\varepsilon(S_x)$, т. е. $S \notin \mathfrak{L}_\varepsilon$.

Пусть $S \in \mathfrak{L}^0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для любой точки $x \in M$ $P_x \subset U_\varepsilon(S_x)$. В таком случае, как следует из леммы, для каждой точки $x \in M$ существуют $\eta_x > 0$ и окрестность $U(x)$ точки x такие, что $\tilde{P}_{\tilde{x}} \subset U_\varepsilon(\tilde{S}_{\tilde{x}})$ для любых $\tilde{S} \in \mathfrak{U}_{\eta_x}(S)$ и $\tilde{x} \in U(x)$. Множества $U(x)$, когда x пробегает M, образуют покрытие M. Из этого покрытия можно выделить конечное покрытие. Пусть его образуют множества $U(x_1), \ldots, U(x_m)$. Если $\eta = \min\{\eta_{x_1}, \ldots, \eta_{x_m}\}$, то для любой системы $\tilde{S} \in \mathfrak{U}_\eta(S)$ и любой точки $x \in M$ $\tilde{P}_x \subset U_\varepsilon(\tilde{S}_x)$, т. е. $S \in \mathfrak{L}_\varepsilon$.

Динамические системы из $\mathfrak{L}^0$ устроены просто. Каждая из них имеет в M единственное минимальное множество, к которому притягиваются при $t \to +\infty$ все траектории. Таких систем мало.

Ослабим немного требования, предъявляемые к системам, и рассмотрим динамические системы, у которых не все, а только почти все траектории устойчивы при постоянно действующих возмущениях.

Пусть $\mathfrak{L}^1 = \{S \in \mathfrak{M}, \overline{L(S)} = M\}$. Поскольку $L(S)$ — множество типа G_δ, то для всякой динамической системы из $\mathfrak{L}^1$ $L(S)$ — множество второй категории по Бэру.

Теорема 3. *$\mathfrak{L}^1$ есть множество типа G_δ.*

Пусть открытые в M множества Γ_j, $j = 1, 2, \ldots$, образуют базис пространства M. Система S не принадлежит $\mathfrak{L}^1$ тогда и только тогда, когда существует j' такое, что для всякого $x \in \Gamma_{j'}$ $P_x \neq S_x$.

Пусть Γ — произвольное открытое множество и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множества

$$\mathfrak{B}_{\Gamma,\varepsilon} = \{S \in \mathfrak{M}\colon \forall x \in \Gamma \quad P_x \not\subset U_\varepsilon(S_x)\}.$$

Утверждается, что $\mathfrak{B}_{\Gamma,\varepsilon}$ замкнуто в $\mathfrak{M}$, т. е. всякая система S, являющаяся пределом последовательности систем $S^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, из $\mathfrak{B}_{\Gamma,\varepsilon}$, также принадлежит $\mathfrak{B}_{\Gamma,\varepsilon}$. Действительно, если бы S не принадлежало $\mathfrak{B}_{\Gamma,\varepsilon}$, то это означало бы, что существует точка x в Γ такая, что $P_x \subset U_\varepsilon(S_x)$. Тогда согласно лемме существует $\eta > 0$ такое, что $\tilde{P}_x \subset U_\varepsilon(\tilde{S}_x)$ для любой системы $\tilde{S} \in \mathfrak{U}_\eta(S)$. Поскольку S является пределом последовательности $S^{(n)}$, то существует $n_0 = n_0(\eta)$ такое, что $S^{(n)} \in \mathfrak{U}_\eta(S)$ при $n > n_0$. Следовательно, $P_x^{(n)} \subset U_\varepsilon(S_x^{(n)})$, а это противоречит предположению, что $S^{(n)} \in \mathfrak{B}_{\Gamma,\varepsilon}$.

Итак, $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_{\Gamma_j, 1/n}$ — множество типа F_σ.

Докажем, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{L}^1$. Согласно определениям, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{L}^1$. Справедливо и обратное: $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{L}^1$. Действительно, если $S \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{L}^1$, то существует открытое в M множество U, содержащееся в $\{x \in M, P_x \neq S_x\}$. Допустим $S \notin \mathfrak{B}$, т. е. $S \notin \mathfrak{B}_{\Gamma_j, 1/n}$ при любых j, n. В таком случае, как это будет показано ниже, существует последовательность $\Gamma_{j_1} \supset \Gamma_{j_2} \supset \ldots$ такая, что $\Gamma_{j_k} \supset \overline{\Gamma}_{j_{k+1}}$, $\Gamma_{j_1} \subset U$ и удовлетворяющая условию: $P_x \subset U_{1/k}(S_x)$ для любого $x \in \Gamma_{j_k}$. Для всякой точки $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma_{j_k}$ $P_x = \bar{S}_x$; это противоречит тому, что $P_x \neq \bar{S}_x$ для точек $x \in U$. Последовательность Γ_{j_k}, $k = 1, 2, \ldots$, можно построить следующим образом. Существует j_0 такое, что $\Gamma_{j_0} \subset U$. Так как $S \in \mathfrak{B}_{\Gamma_{j_0}, 1}$, то существует точка $x \in \Gamma_{j_0}$, для которой $P_x \subset U_1(S_x)$. Согласно лемме, найдется η_1 такое, что $P_{\tilde{x}} \subset U_1(S_{\tilde{x}})$ для любых $\tilde{x} \in U_{\eta_1}(x)$. Существует j_1 такое, что $\Gamma_{j_1} \subset U_{\eta_1}(x) \cap \Gamma_{j_0}$. Для любого $x \in \Gamma_{j_1}$ $P_x \subset U_1(S_x)$. Имея множество $\Gamma_{j_{k-1}}$, множество Γ_{j_k} можно выделить так. Поскольку $S \notin \mathfrak{B}_{\Gamma_{j_{k-1}}, 1/k}$, то существует точка $x \in L_{j_{k-1}}$, для которой $P_x \subset U_{1/k}(S_x)$. Согласно лемме, найдется η_k такое, что $P_{\tilde{x}} \subset U_{1/k}(S_{\tilde{x}})$ для любых $\tilde{x} \in U_{\eta_k}(x)$. Существует j_k такое, что $\overline{\Gamma}_{j_k} \subset \Gamma_{j_{k-1}} \cap U_{\eta_k}(x)$. Для любого $x \in \Gamma_{j_k}$ $P_x \subset U_{1/k}(S_x)$. Этим доказательство теоремы завершено.

Оценки, даваемые теоремами 2 и 3, являются точными: существуют многообразия, для которых $\mathfrak{L}^0$, $\mathfrak{L}^1$ не являются F_σ-множествами. Пусть, например, M — двумерный тор. Однопараметрическое семейство систем $\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = \alpha$ на торе, обозначим это семейство $\mathfrak{N}$, образует в $\mathfrak{M}$ замкнутое множество. Легко убедиться, что $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{L}^0 = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{L}^1$. Последнее множество, являясь плотным на $\mathfrak{N}$ G_δ-множеством, не является F_σ-множеством на $\mathfrak{N}$, так как его дополнение также плотно на $\mathfrak{N}$. Если какое-либо из множеств $\mathfrak{L}^i$, $i = 0, 1$, было бы F_σ-множеством в $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{L}^i$ было бы F_σ-множеством в $\mathfrak{N}$, а это не так.

Теорема 4. *$\mathfrak{L}^1$ плотно в $\mathfrak{M}$.*

Ввиду того, что $\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{M} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_{\Gamma_j, 1/n}$, для доказательства теоремы достаточно показать, что множество $\mathfrak{B}_{\Gamma_j, 1/n}$ при любых j, n нигде не плотны в $\mathfrak{M}$.

Пусть открытые в M множества $U_1, \ldots, U_k$ таковы, что $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \supset M$ и $\operatorname{diam} U_i < \varepsilon$ при всех i. Предположим $S^{(0)} \in \mathfrak{B}_{\Gamma, \varepsilon}$ и $\eta > 0$ произвольное. Покажем, что в $\mathfrak{U}_\eta(S^{(0)})$ существует $\tilde{S} \notin \mathfrak{B}_{\Gamma, \varepsilon}$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in \Gamma$. Найдется $U_{i_1} \ni x_0$. Так как $S^{(0)} \in \mathfrak{B}_{\Gamma, \varepsilon}$, то $P_{x_0}^{(0)} \not\subset U_{i_1}$. В силу непрерывной зависимости от $S \in \mathfrak{M}$ отображения S^t существует $\eta_1 < \eta / k$ такое, что $S_{x_0} \cap U_{i_1} \neq \phi$ для любой системы $S \in \mathfrak{U}_{\eta_1}(S^{(0)})$. Поскольку $P_{x_0}^{(0)} \not\subset U_{i_1}$, то найдется U_{i_2} такое, что $P_{x_0}^{(0)} \cap U_{i_2} \neq \phi$. Существует $S^{(1)} \in \mathfrak{U}_{\eta_1}(S^{(0)})$, для которой $S_{x_0}^{(1)} \cap U_{i_2} \neq \phi$. Либо $P_{x_0}^{(1)} \subset U_\varepsilon(S_{x_0}^{(1)})$ и, следовательно, $S^{(1)}$ уже не принадлежит $\mathfrak{B}_{\Gamma, \varepsilon}$, либо $S^{(1)} \in \mathfrak{B}_{\Gamma, \varepsilon}$. Если справедливо последнее, то $P_{x_0}^{(1)} \not\subset U_{i_1} \cup U_{i_2}$. В силу непрерывной зависимости от $S \in \mathfrak{M}$ отображения S^t существует $\eta_2 < \eta / k$ такое, что $S_{x_0} \cap U_{i_1} \neq \phi$ и $S_{x_0} \cap U_{i_2} \neq \phi$ для любой системы $S \in \mathfrak{U}_{\eta_2}(S^{(1)})$ и т. д. Очевидно, этот процесс оборвется не более чем через k шагов. Динамическая система, на которой обрывается процесс, принадлежит $\mathfrak{U}_\eta(S^{(0)})$, так как $\eta_1 + \eta_2 + \ldots < \eta$, но не принадлежит $\mathfrak{B}_{\Gamma, \varepsilon}$. Теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 вытекает основной результат: *$\mathfrak{L}^1$ есть множество второй категории в $\mathfrak{M}$.*

Из последнего утверждения непосредственно следует, что грубые системы принадлежат $\mathfrak{L}^1$. Действительно,

1) если динамическая система принадлежит $\mathfrak{L}^1$, то и всякая топологически эквивалентная ей система принадлежит $\mathfrak{L}^1$;

2) всякая грубая система имеет в $\mathfrak{M}$ окрестность, состоящую из топологически эквивалентных ей систем.

Все утверждения остаются справедливыми, если вместо устойчивости в положительном направлении рассмотреть устойчивость в отрицательном направлении или устойчивость одновременно как в положительном, так и в отрицательном направлениях.

Приведенные теоремы справедливы также и для полугрупп отображений (в доказательствах нигде не использовалось существование отображения, обратного S^t).

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
3 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Peixoto, Topology, 1, № 2, 101 (1962). [2] С. Смейл, Сборн. пер. Математика, 11, № 4, 107 (1967). [3] Р. Абрахам, С. Смейл, Сборн. пер. Математика, 13, № 2, 156 (1969). [4] S. Newhouse, Proc. Symp. Pure Math., 14, AMS, 191 (1970). [5] О. М. Шарковський, Четверта наукова конфер. молодих математиків України, 1968, с. 146. [6] Д. Я. Хусаинов, А. Н. Шарковский, Тр. семин. по матем. физике, 1969, стр. 380. [7] Н. А. Артемьев, Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 351 (1969).