Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 2

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

Р. В. ДУДУЧАВА

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВИНЕРА — ХОПФА С РАЗРЫВНЫМИ СИМВОЛАМИ

(*Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 26 X 1972*)

1°. Через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ будем обозначать оператор Фурье — Планшереля и обратный к нему соответственно:

$$(\mathcal{F}\varphi)(t)=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\varphi(\tau)\,e^{i\tau t}d\tau,\qquad (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(t)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\varphi(\tau)\,e^{-i\tau t}d\tau.$$

Пусть $a(t)$ — ограниченная измеримая функция на действительной оси $R=(-\infty,\infty)$ и $\varphi\in L_p(R)\cap L_2(R)$, $1<p<\infty$; определим оператор

$$(\tilde{W}_a\varphi)(t)=(\mathcal{F}^{-1}aF\varphi)(t)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}a(\tau)(\mathcal{F}\varphi)(\tau)\,e^{-i\tau t}d\tau.$$

Если $\|\tilde{W}_a\varphi\|_{L_p(R)}\leqslant C\|\varphi\|_{L_p(R)}$, то оператор $\tilde{W}_a$ имеет единственное непрерывное продолжение на всё пространство $L_p(R)$, которое также будем обозначать через * $\tilde{W}_a$.

Пространство $L_p(R^+)$, где $R^+=(0,\infty)$, можно рассматривать как подпространство пространства $L_p(R)$; пусть $P$ — проектор, проектирующий пространство $L_p(R)$ на $L_p(R^+)$. Через $W_a$ будем обозначать в дальнейшем оператор, полученный сужением оператора $P\tilde{W}_aP$ на подпространство $L_p(R^+)$.

Класс функций вида $a(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\,\chi_k(t)$, где $\chi_k(t)$ — характеристические функции отрезков из $R$, $a_k(t)=C_k+(\mathcal{F}g_k)(t)$ и $g_k\in L_1(R)$ (или $g_k\in L_1(R)\cap L_q(R)$; $q=p/(p-1)$, $1<p<\infty$), обозначим через $\Pi\mathfrak{K}(R)$ (через $\Pi\mathfrak{K}_p(R)$ соответственно). Нетрудно проверить, что $\Pi\mathfrak{K}(R)$ и $\Pi\mathfrak{K}_p(R)$ являются алгебрами.

Опираясь на известную теорему М. Рисса (см. ([1])) об ограниченности сингулярного интегрального оператора в пространстве $L_p(R)$, $1<p<\infty$, и учитывая ограниченность оператора $\int_{-\infty}^{\infty}k(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$, $k\in L_2(R)$, в этом же пространстве (см. ([2])), можно доказать ограниченность оператора $W_a$, где $a\in\Pi\mathfrak{K}(R)$, в пространстве ** $L_p(R^+)$.

Отметим, что если $a\in\Pi\mathfrak{K}_p(R)$, $1<p<\infty$, то оператор $W_a$ действующий в пространстве $L_p(R^+)$, имеет вид

$$(W_a\varphi)(t)=c\varphi(t)+\int_{0}^{\infty}k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,\tag{1}$$

* Если $A$ — линейный ограниченный оператор в пространстве $L_p(R)$, $1\leqslant p<\infty$, и $(\mathcal{F}A\varphi)(t)=a(t)(\mathcal{F}\varphi)(t)$ для всех $\varphi\in L_p(R)\cap L_2(R)$, то $A$ совпадает с оператором $\tilde{W}_a$.

** Операторы $\tilde{W}_a$ и $W_a$ одновременно ограничены или неограничены в пространствах $L_p(R)$ и $L_p(R^+)$ соответственно и $\|\tilde{W}_a\|_{L_p(R)}=\|\tilde{W}_a\|_{L_p(R^+)}$.

где функция $k(t)$, вообще говоря, неинтегрируема и интеграл в (1) понимается в смысле главного значения по Коши.

В настоящей работе приводятся необходимые и достаточные условия нётеровости * оператора $W_a$ в пространстве $L_p(R^+)$, $1 < p < \infty$, когда функция $a(t)$ принадлежит классу $\Pi\mathfrak{K}(R)$ или $\mathfrak{R}_p(R)$ (определение последнего см. в п. 4°). Исследуются также некоторые другие классы операторов.

2°. Каждой измеримой ограниченной функции $a(t)$ на $R$, имеющей пределы $a(t\pm 0) = \lim\limits_{n\to\infty} a(t \pm 1/n)$, $a(\infty \mp 0) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} a(t)$, сопоставим функцию

$$a_p(t, x) = \begin{cases} a(t-0)\,[1-g_p(x)] + a(t+0)\,g_p(x), & \text{если } |t| < \infty, \\ a(\infty-0)\,[1-g_q(x)] + a(\infty+0)\,g_q(x), & \text{если } t = \pm\infty, \end{cases}$$

где

$$g_r(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x\theta}{\sin\theta}\, e^{i(x-1)\theta}, & \text{если } \theta \neq 0, \\ x, & \text{если } \theta = 0, \end{cases} \tag{2}$$

и $\theta = \pi - 2\pi(r-1)/r$, $r = p, q$; $1 < p < \infty$; $q = p/(p-1)$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Множество значений функции $a_p(t, x)$, $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, является замкнутой кривой и получается путем добавления к множеству значений функции $a(t)$, $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, определенных дуг окружностей, соединяющих в точках разрыва значения функции $a(t-0)$ и $a(t+0)$ между собой.

Функцию $a \in \Pi\mathfrak{K}(R)$ будем называть $p$-неособенной, если $\inf\limits_{t,x} |a_p(t, x)| > 0$. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ суть все точки разрыва $p$-неособенной функции $a \in \Pi\mathfrak{K}(R)$; введем обозначение:

$$\operatorname{ind} a_p(t, x) = \frac{1}{2\pi}\,[\arg a(t)]_{t\in R} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi}\,[\arg a_p(c_k, x)]_{x\in[0,1]},$$

где $[g(t)]_{t\in\Gamma}$ означает приращение функции $g(t)$, когда $t$ пробегает линию $\Gamma$ один раз.

Теорема 1. *Пусть $a \in \Pi\mathfrak{K}(R)$. Для того чтобы оператор $W_a$ был $\Phi_+$- или $\Phi_-$-оператором в пространстве* ** $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы функция $a(t)$ была $p$-неособенной. Если это условие выполнено, то обратимость оператора $W_a$ согласована с числом* *** $\operatorname{ind} a_p(t, x)$ *и* ****

$$\operatorname{Ind} W_a = -\operatorname{ind} a_p(t, x).$$

Сформулированная теорема в случае непрерывного символа $a(t) = C + (\mathscr{F}g)(t)$, где $g \in L_1(R)$, доказана в [2].

3°. Через $\mathfrak{R}$ обозначим алгебру операторов вида

$$A = \sum_{k=1}^{r} W_{a_{k1}} \ldots W_{a_{ks}},$$

где $a_{kj} \in \Pi\mathfrak{K}(R)$; символом оператора $A$ в пространстве $L_p(R^+)$, $1 < p < \infty$, назовем функцию

$$A_p(t, x) = \sum_{k=1}^{r} (a_{k1})_p(t, x) \ldots (a_{ks})_p(t, x), \quad -\infty \leqslant t \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Из соотношения

$$\max_{t,x} |A_p(t, x)| \leqslant \inf_{T\in\mathfrak{S}_p} \|A + T\|_{L_p(R^+)}, \tag{3}$$

* Линейный ограниченный оператор $A$ в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ называется нётеровым, или $\Phi$-оператором, если он нормально разрешим и $\dim\ker A < \infty$, $\dim\operatorname{coker} A < \infty$.

** Линейный ограниченный оператор $A$ в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ называется $\Phi_+$- $(\Phi_-)$-оператором, если он нормально разрешим и $\dim\ker A < \infty$, $\dim\operatorname{coker} A < \infty$.

*** Говорят, что обратимость оператора $A$ согласована с числом $\alpha$, если этот оператор обратим, обратим только слева или обратим только справа в зависимости от того является ли число $\alpha$ равным нулю, положительным или отрицательным (см. [3]).

**** $\operatorname{Ind} A = \dim\ker A - \dim\operatorname{coker} A$.

где $\mathfrak{S}_p$ — множество всех вполне непрерывных операторов в $L_p(R^+)$, следует, что символ оператора $A$ не зависит от его представления в виде

$$A = \sum_{j=1}^{r} W_{a_{j1}} \dots W_{a_{js}}.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_p$ замыкание алгебры $\mathfrak{R}$ по норме операторов в пространстве $L_p(R^+)$. В силу соотношения (3), каждому оператору $A \in \mathfrak{A}_p$ однозначно сопоставляется функция $A_p(t, x)$, которую назовем символом этого оператора. Отметим, что символ $A_p(t, x)$ оператора $A \in \mathfrak{A}_p$ является непрерывной функцией на цилиндре $\mathfrak{M} = \{(t, x): -\infty \leqslant t \leqslant \infty, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, на которой точки $(-\infty, x)$ и $(\infty, x)$ отождествляются, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и которая наделяется топологией, указанной в ([4]).

Теорема 2. *Для того чтобы оператор $A \in \mathfrak{A}_p$, $1 < p < \infty$, был Ф-оператором* в пространстве $L_p(R^+)$, необходимо и достаточно, чтобы* $\inf|A_p(t, x)| > 0$, $(t, x) \in \mathfrak{M}$. *Если это условие выполнено, то*

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{ind} A_p(t, x).$$

Доказательство теоремы основано на том, что фактор-алгебра $\hat{\mathfrak{A}}_p = \mathfrak{A}_p/\mathfrak{S}_p$ является коммутативной и множество максимальных идеалов этой алгебры гомеоморфно цилиндру $\mathfrak{M}$; функцией на бикомпакте максимальных идеалов от класса смежности $\hat{A} \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ является символ оператора $A \in \hat{A}$.

4°. Класс функций, непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha$ на $R$, обозначим через $H_\alpha(R)$, а класс функций $a(t)$, для которых $\sup \sum_{j=1}^{n} |a(t_k) - a(t_{k-1})|^\beta < \infty$, $-\infty \leqslant t_0 < \ldots < t_n \leqslant \infty$, обозначим через $V_\beta(R)$.

Через $\mathfrak{R}_p(R)$, $1 < p < \infty$, обозначим класс функций вида $a(t) = \sum_{j=1}^{r} \prod_{k=1} a_{jk}(t)$, где функции $a_{jk}(t)$ удовлетворяют одному из следующих условий: 1) $a_{jk} \in \Pi\mathfrak{K}(R)$; 2) $a_{jk} \in V_\beta(R)$ и $1 \leqslant \beta < p/|p-2|$; 3) $a_{jk} \in H_\alpha(R) \cap V_\beta(R)$, $|a_{jk}(t)| \leqslant c(|t|+1)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ и $r \leqslant \beta < 2p / |p-2|$.

В ([5]) доказано, что если функция $a_{jk}(t)$ удовлетворяет условиям 2) или 3), сформулированным выше, то оператор $W_{a_{jk}}$ ограничен в пространстве $L_p(R)$. Опираясь на эти результаты, можно доказать, что если $a \in \mathfrak{R}_p(R)$, то оператор $W_a$ ограничен в $L_p(R^+)$ и принадлежит алгебре $\mathfrak{A}_p$. Следовательно, теорема 1 сохраняет силу, если в его формулировке класс функций $\Pi\mathfrak{K}(R)$ заменить на $\mathfrak{R}_p(R)$.

5°. Напомним, что через $P$ обозначается проектор, проектирующий пространство $L_p(R)$ на $L_p(R^+)$: пусть $Q = I - P$, где $I$ — единичный оператор.

Теорема 3. *Пусть $a, b \in \Pi\mathfrak{K}(R)$. Для того чтобы оператор $A = \tilde{W}_a P + \tilde{W}_b Q$ $(A = P\tilde{W}_a + Q\tilde{W}_b)$ был $\Phi_+$- или $\Phi_-$-оператором в пространстве $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*: 1) $\inf|b(t)| > 0$, $t \in R$; 2) *функция* $a(t) / b(t)$ *была p-неособенной.*

*Если выполнены условия теоремы, то обратимость оператора A согласована с числом* $\operatorname{ind}(a \cdot b^{-1})_p(t, x)$ *и*

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{ind}(a \cdot b^{-1})_p(t, x).$$

При доказательстве настоящей теоремы мы пользовались общей схемой предложенной в ([3]).

Отметим, что если $a, b \in \Pi\mathfrak{K}_p(R)$, $1 < p < \infty$, то оператор $A = \tilde{W}_a P + \tilde{W}_b Q$ имеет вид

$$(A\varphi)(t) = c\varphi(t) + \int_0^\infty k_1(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^0 k_2(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

* Все операторы, рассмотренные в настоящей заметке, обладают свойством: если они являются $\Phi_+$- или $\Phi_-$-операторами, то они являются и Ф-операторами.

где функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$, вообще говоря, неинтегрируемы и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Операторы $\widetilde{W}_a P + \widetilde{W}_b Q$ и $P\widetilde{W}_a + Q\widetilde{W}_b$ называются парным и транспонированным к парному соответственно.

6°. Пусть $a, b \in \Pi\mathfrak{K}(R)$. Символом оператора $A = \widetilde{W}_a P + \widetilde{W}_b Q$ в пространстве $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, назовем матрицу-функцию

$$A_p(t,x) = \left\| \begin{matrix} a_p(t,x) & [b(t+0) - b(t-0)]\, h_t(x) \\ [a(t+0) - a(t-0)]\, h_t(x) & b_p(t,x) \end{matrix} \right\|,$$

где

$$h_t(x) = \begin{cases} \sqrt{g_p(x)\,[1 - g_p(x)]} & \text{при } |t| < \infty, \\ \sqrt{g_q(x)\,[1 - g_q(x)]} & \text{при } t = \pm\infty, \end{cases}$$

$q = p/(p-1)$ и функция $g(x)$ определяется равенством (2).

Через $\widetilde{\mathfrak{R}}$ обозначим алгебру операторов вида

$$A = \sum_{j=1}^{r} [\widetilde{W}_{a_{j1}} P + \widetilde{W}_{b_{j1}} Q] \ldots [\widetilde{W}_{a_{js}} P + W_{b_{js}} Q], \tag{4}$$

где $a_{jk}, b_{jk} \in \Pi\mathfrak{K}(R)$. Символом оператора $A$ в пространстве $L_p(R)$, $1 < p < \infty$, назовем матрицу-функцию $A_p(t,x) = \sum_{j=1}^{r} (A_{j1})_p(t,x) \ldots (A_{js})_p(t,x)$, где $(A_{jk})_p(t,x)$ — символ оператора $A_{jk} = \widetilde{W}_{a_{jk}} P + \widetilde{W}_{b_{jk}} Q$. Символ $A_p(t,x) = \|a_{jk}(t,x)\|_{j,k=1}^{2}$ оператора $A \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ не зависит от представления этого оператора в виде (4); это следует из соотношения

$$\max_{t,x} |a_{jk}(t,x)| \leqslant \inf_{T \in \widetilde{\mathfrak{S}}_p} \|A + T\|_{L_p(R)}, \tag{5}$$

где $\widetilde{\mathfrak{S}}_p$ — множество всех вполне непрерывных операторов в пространстве $L_p(R)$.

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{A}}_p$ замыкание алгебры $\widetilde{\mathfrak{R}}$ по норме операторов в пространстве $L_p(R)$. В силу соотношения (5), каждому оператору $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}_p$ однозначно сопоставляются матрица-функция $A_p(t,x)$, $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, которую назовем символом оператора $A$.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор $A \in \widetilde{\mathfrak{A}}_p$ был Ф-оператором в пространстве $L_p(R)$, необходимо и достаточно, чтобы* $\inf|\det A_p(t,x)| > 0$, *где $A_p(t,x) = \|a_{jk}(t,x)\|_{j,k=1}^{2}$ — символ оператора $A$. Если это условие выполнено, то*

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{ind}\left[\frac{\det A_p(t,x)}{a_{22}(t,0)\, a_{22}(t,1)}\right].$$

Доказательство сформулированной теоремы проводится в основном по схеме, предложенной в [6].

Следствие. *Теорема 3 сохраняет силу, если в его формулировке класс функций $\Pi\mathfrak{K}(R)$ заменить на $\mathfrak{R}_p(R)$* (см. п. 4°).

7°. В заключение отметим, что все основные предложения настоящей заметки имеют место и для операторов $W_{\mathcal{A}}$ и $\widetilde{W}_{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{A}(t)$ — матрица-функция, а также для симметричных пространств функций, рассмотренных в [7].

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
23 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1—2, М., 1965. [2] С. Г. Крейн, УМН, 13, в. 5 (1958). [3] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнение в свертках и проекционные методы их решения, «Наука», 1971. [4] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Функциональн. анализ и его прилож., 3, в. 2 (1969). [5] I. I. Hirschman jr., Duke Math. J., 26, № 2 (1959). [6] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Изв. АН СССР, сер. матем., 35, в. 4 (1971). [7] D. W. Boyd, Proc. AMS, 18, № 2 1967).