Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 2

УДК 532.546 **_ГИДРОМЕХАНИКА_**

Р. М. КАЦ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СОВМЕСТНОГО ТЕЧЕНИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 19 IX 1972)

Вытеснение нефти из пористой среды часто имеет неустойчивый характер: вытесняющая жидкость проникает в нефть в виде «языков», что снижает текущую нефтеотдачу пластов. Проблеме устойчивости вытеснения посвящен ряд работ ([1–5]). В этих работах рассматривается устойчивость границы раздела двух жидкостей. Обычно при вытеснении в реальной пористой среде образуется не граница раздела, а область совместного течения жидкостей. В заметке рассматривается устойчивость стабилизированной зоны ([6]) — передней части указанной области.

Изотермическая фильтрация двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей в изотропной недеформируемой пористой среде описывается системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных ([7]), содержащих две неизвестные функции: давление и насыщенность одной из жидкостей. Методом зональной линеаризации указанная система сведена к системе интегро-дифференциальных уравнений (и.д.у.) ([8]), решение которой дает динамику поля поверхностей или линий уровня насыщенности (изосат). Ниже система и.д.у. используется для исследования устойчивости (по отношению к малым возмущениям) плоской стабилизированной зоны, т. е. плоского одномерного течения, в котором все изосаты — параллельные прямые, перемещающиеся с одной и той же постоянной скоростью *.

Система и.д.у., описывающая поле изосат в плоскости x, y, может быть получена из ([8]) в безразмерном виде:

$$u_q(x,t) - c_{q,q+1}\pi^{-1}\sum_{j=0}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}[c_{j,j+1}^{-1}\lambda_{j,j+1}u_j(\xi,t) - a_{j,j+1}w^{-1}\sin\alpha]\,R_{jq}\,d\xi =$$
$$= c_{q,q+1}[c_{0,N+1}^{-1} + 0{,}5w^{-1}(L_0c_0^{-1} + L_{N+1}c_{N+1}^{-1} - w^{-1}b_{q,q+1}]; \tag{1}$$

$$u_q(x,t)\,F'(s_q) = y_{tq} - kq\Delta\rho\mu_1^{-1}w^{-1}U(s_q)\sin\alpha + V(s_q)(y_{s_q})^{-2}\,[-y_{ss_q}[1 +$$
$$+ (y_{x_q})^2] - 2y_{sx_q}y_{s_q}y_{x_q} + y_{xx_q}(y_{s_q})^2] + V_s(s_q)(y_{s_q})^{-1}[1 + (y_{x_q})^2],$$
$$q = 0, 1, \ldots, N; \tag{2}$$

$$R_{j,q}(x,\xi,t) = \frac{y_{x_q}(x,t)(x-\xi) - y_q(x,t) + \eta_j(\xi,t)}{(x-\xi)^2 + [y_q(x,t) - \eta_j(\xi,t)]^2},$$
$$V(s) = f_1(s)\,F(s)\,p_k'(s)\,[p_k'(s_*)]^{-1}, \quad U(s) = d\,[f_1(s)F(s)]/ds,$$
$$\lambda_{q,q+1} = (c_q - c_{q+1})(c_q + c_{q+1})^{-1}, \quad c_{q,q+1} = 2c_{q,q+1}(c_q + c_{q+1})^{-1},$$
$$c_{0,N+1} = 2c_0c_{N+1}(c_0 + c_{N+1})^{-1}, \quad a_{q,q+1} = 0{,}5(\widetilde{L}_qc_q^{-1} - \widetilde{L}_{q+1}c_{q+1}^{-1}),$$
$$b_{q,q+1} = 0{,}5(\widetilde{L}_qc_q^{-1} + \widetilde{L}_{q+1}c_{q+1}^{-1}), \quad c_{1,q} = f_1(\widetilde{s}_q)\,\mu_1^{-1}, \quad c_{2,q} = f_2(\widetilde{s}_q)\,\mu_2^{-1},$$
$$c_q = c_{1,q} + c_{2,q}; \quad s_{q-1} < \widetilde{s}_q < s_q, \quad L = g\,[f_1(s)\,\rho_1\mu_1^{-1} + f_2(s)\,\rho_2\mu_2^{-1}],$$
$$F(s) = f_1(s)\,[f_1(s) + \mu_1\mu_2^{-1}f_2(s)]^{-1}, \quad F'(s) = dF/ds, \quad p_k'(s) = dp_k/ds,$$
$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1.$$

---

* Вектор скорости перпендикулярен изосатам и направлен вдоль оси y.

Здесь $y_q = y(x, s, t)|_{s=s_q}$ — уравнение изосаты с номером q (искомая функция x и t при фиксированном $s=s_q$); $u_q(x, t)$ — вспомогательная функция; s — насыщенность порового объема вытесняющей жидкостью, $p_k(s)$ — капиллярное давление; $f_1(s)$, $f_2(s)$ — относительные проницаемости, причем $f_2(s_0)=0$, где s_0 — нижний предел насыщенности; k — абсолютная проницаемость, далее считается постоянной; ρ_1, ρ_2 и μ_1, μ_2 — соответственно плотность и вязкость жидкостей; w — невозмущенная скорость фильтрации, или скорость фильтрации на бесконечности, α — угол наклона плоскости течения к горизонту; g — ускорение силы тяжести; N — число областей (зон), на которые разбивается стабилизированная зона. Индексы 1 и 2 относятся соответственно к вытесняемой и вытесняющей жидкостям. Нижними индексами s, x, t обозначены производные по этим переменным, индексами q, j — значения функции в точках $s=s_q$, $s=s_j$. Тильдой обозначена величина, осредненная в соответствующей области. Связь безразмерных величин с размерными, которые отмечены штрихом, такова [6]:

$$y = \frac{\mu_1 w y'}{k p_k'(s_*)}, \quad x = \frac{\mu_1 w x'}{k p_k'(s_*)}, \quad t = \frac{\mu_1 w^2 t'}{m k p_k'(s_*)},$$

где $s_* = 1$ для вытеснения смачивающей жидкостью, $s_* = 0$ для несмачивающей, m — пористость.

Решение системы (1), (2), описывающее течение в стабилизированной зоне, имеет вид [6]

$$y(s, t)|_{s=s_q} = y_q^0 + w_* t, \tag{3}$$

$$y_q^0 - y^* = \frac{1}{p_k'(s_k)} \int\limits_{s_*}^{s_q} \frac{F(s)\, p_k'(s)\, f_1(s)\, ds}{\Phi(s_N) - \Phi(s) - [\Phi(s_N) - \Phi(s_0)]\,(s_N - s)]/[(s_N - s_0)}, \tag{4}$$

$$\Phi(s) = F(s)\,[1 - kg\Delta\rho w^{-1}\mu_1^{-1}\sin\alpha f_1(s)], \qquad w_* = [\Phi(s_N) - \Phi(s_0)]/(s_N - s_0);$$

здесь $y^* = y(s^*)$ выбрано для определения начала отсчета, $w_* = m w_*' w^{-1} = \mathrm{const}$ — безразмерная скорость перемещения изосат.

На краях стабилизированной зоны

$$\left.\begin{array}{l} y^0(s) \to -\infty \\ y_s^0(s) \to -\infty \end{array}\right\} \text{ при } s \to s_N; \quad \begin{array}{ll} y^0(s) = 0 & \text{при } s = s_0, \\ y_s(s) \to 0 & \text{при } s \to s_0 - 0, \\ y_s(s) \to \infty & \text{при } s \to s_0 + 0. \end{array} \tag{5}$$

Практически ширина стабилизированной зоны $|y_N{}^0| = |y(s_N')|$, где $s' = s_N - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, мала [6].

Из (3) следует, что распределение насыщенности в системе координат, движущейся со скоростью w_*, стационарно.

Будем исследовать в рамках линейной теории устойчивость решения (3) по отношению к волновым возмущениям с малой амплитудой. Представим решение системы (1), (2), описывающее возмущенное поле изосат, в виде

$$y_q = y_q^0 + w_* t + a\varphi_q e^{\sigma t + i\beta x},$$

$$u_q = 1 + a\psi_q e^{\sigma t + i\beta x}, \qquad \varphi_q = \varphi(s_q), \qquad \psi_q = \psi(s_q), \tag{6}$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — некоторые ограниченные функции насыщенности, характеризующие начальное возмущение, β — частота, связанная с длиной волны λ соотношением $\beta = 2\pi\lambda^{-1}$, a — амплитуда возмущения. Подставим (6) в систему (1), (2) и ограничимся членами порядка a. Вычисляя определенные интегралы, сводящиеся к табличным, и представляя дифференциальный оператор $V(s)\varphi_{ss} + V_*(s)\varphi_s$ в разностной форме, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно φ_q и ψ_q:

$$\psi_q + c_{q,\,q+1} \sum_{j=0}^{N} c_{j,\,j+1}^{-1} \lambda_{j,\,j+1} \operatorname{sign}(j-q) \exp(-\beta\,|y_q^0 - y_j^0|) \cdot \psi_j =$$

$$= -\beta c_{q,\,q+1} \sum_{j=0}^{N} c_{j,\,j+1}^{-1} \lambda_{j,\,j+1} W_j \exp(-\beta\,|y_q^0 - y_j^0|) \cdot \varphi_j, \quad q = 0, 1, \ldots, N; \tag{7}$$

$$F'(s_q)\,\psi_q = \sigma\varphi_q + \beta^2 V(s_q)\,\varphi_q - [V(s_q)(\varphi_{q+1} - 2\varphi_q + \varphi_{q-1})(\Delta s_q)^{-2} +$$

$$+ V_s(s_q)(\varphi_{q+1} - \varphi_{q-1})(2\Delta s_q)^{-1}]\,(y_{s_q}^0)^{-2}. \quad q = 1, 2, \ldots, N-1; \tag{8}$$

$$\Delta s_q = s_{q+1} - s_q = s_q - s_{q-1}, \quad W_q = 1 - a_{q,\,q+1} \lambda_{q,\,q+1}^{-1} w^{-1} \sin\alpha.$$

Система (7), (8) содержит $2N$ уравнений с $2N+2$ неизвестными. Если принять в качестве свободных неизвестных φ_0, φ_N и придать им нулевые значения, приходим к задаче о собственных значениях. Однако здесь постановка такой задачи была бы необоснованной, поскольку на границах стабилизированной зоны (подвижных изосатах) возмущения, вообще говоря, не стремятся к нулю. Постановка же задачи с начальными данными (9) в общем случае сопряжена с громоздкими вычислениями. Кроме того, решение обеих задач осложняется наличием особой точки s_0, в которой $F'(s_0) = 0$ и $y_s^0 \to 0$ при $s \to s_0 - 0$.

Поэтому рассмотрим специальную задачу с начальными данными, в которой функция $\varphi(s)$ задается таким образом, что система (8) приобретает вид *

$$\psi_q = [F'(s_N)]^{-1}[\sigma + \beta^2 V(s_N)]\varphi_q, \quad q = 0, 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Другими словами, все коэффициенты (8) берутся в точке $s = s_N$, где производная $y_{s_N}^0 \to \infty$ аннулирует член, содержащий разностный оператор.

Такой выбор начальных данных при исследовании устойчивости относительно возмущений (6) оказывается единственно возможным, если учесть необходимость выполнения одновременно двух условий: граничного условия

$$\psi_N = [F'(s_N)]^{-1}[\sigma + \beta^2 V(s_N)]\varphi_N, \quad s = s_N,$$

и условия совместности уравнений (7) и (9) при $\beta|y_N^0| \to 0$. Последнее условие необходимо для того, чтобы система (7), (9) допускала физически очевидные решения ($\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_N$; $\psi_0 = \psi_1 = \ldots = \psi_N$) для возмущений, длина волны которых намного больше ширины стабилизированной зоны $|y_N^0|$.

Подставляя (9) в (7), приходим к системе линейных однородных уравнений относительно φ_q:

$$[F'(s_N)]^{-1}[\sigma + \beta^2 V(s_N)]\,\varphi_q + c_{q,\,q+1} \sum_{j=0}^{N} c_{j,\,j+1}^{-1} \lambda_{j,\,j+1} \exp(-\beta\,|y_q^0 - y_j^0|) \times$$

$$\times [\operatorname{sign}(j-q)[F'(s_N)]^{-1}[\sigma + \beta^2 V(s_N)] + \beta W_j]\,\varphi_j = 0, \quad q = 0, 1, \ldots, N, \tag{10}$$

имеющей нетривиальные решения в случае, когда ее определитель

$$D[\sigma,\ \beta,\ V(s_N)F'(s_N),\ c_{01}, \ldots, c_{N,\,N+1},$$

$$\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{N,\,N+1},\ W_0, \ldots, W_N,\ y_0, \ldots, y_N] = 0. \tag{11}$$

Если для всех корней уравнения (11), разрешаемого относительно σ, $\operatorname{Re}\sigma < 0$, течение устойчиво. Если хотя бы у одного из корней $\operatorname{Re}\sigma < 0$, те-

* Система (9) дополнена двумя уравнениями со свободными неизвестными φ_0 и φ_N.

чение неустойчиво, т. е. возможно образование языков вытесняющей жидкости. Полагая, что для фильтрационных течений справедлив принцип изменения устойчивости ([10]), т. е. σ всегда действительно и проходит через 0, можно найти связь между критическими параметрами при $\sigma = 0$.

Приведем пример расчета критической частоты возмущений $\beta_{\text{кр}}$ при вытеснении нефти газом. Относительные проницаемости и капиллярные давления принимались в виде ([6]), $\mu_1\mu_2^{-1} = 100$, $\alpha = 0$. В этом случае $s_N = 0{,}2645$. Принимаем в качестве границ стабилизированной зоны $s_N' = 0{,}26$ $(\varepsilon = 0{,}0045)$, $s_0 = 0{,}1$. Среднее значение $\bar{s}_q$ бралось равным среднеинтегральной (по y) насыщенности.

В результате расчетов по однозонной схеме ($s_1' = 0{,}26$, $s_0 = 0{,}1$, $\bar{s}_1 = 0{,}252$) получено минимальное значение $\beta_{\text{кр}} = 1{,}56$, по двухзонной ($s_2' = 0{,}26$, $s_1 = 0{,}252$, $s_0 = 0{,}1$, $\bar{s}_2 = 0{,}256$, $\bar{s}_1 = 0{,}244$) — $\beta_{\text{кр}} = 1{,}4$. Дальнейшее увеличение числа зон практически не приводит к уточнению $\beta_{\text{кр}}$, что говорит о быстрой сходимости метода. Таким образом, при $\beta < 1{,}4$ течение неустойчиво, при $\beta > 1{,}4$ устойчиво.

Если пренебречь шириной стабилизированной зоны, положив $y_N^0 = 0$ ([5]), то из (10) при $\sigma = 0$ имеем

$$\beta_{\text{кр}} = \lambda_{0,\,N+1} F'(s_N)\,[V(s_N)]^{-1}. \tag{12}$$

Для принятых выше значений параметров из (12) получаем $\bar{\beta}_{\text{кр}} = 2{,}28$. Это свидетельствует о том, что пренебрежение размерами стабилизированной зоны при исследовании ее устойчивости может привести к неудовлетворительным результатам.

Предложенный метод пригоден и для исследования устойчивости переходной зоны при совместной фильтрации смешивающихся жидкостей в однородном пласте. В частности, если пренебречь диффузией и считать вытеснение поршневым, можно с помощью (10) найти критерий устойчивости оторочки растворителя, проталкиваемой вытесняющей жидкостью.

Положив в системе (10) $F'(s_N) = 1$, $V(s_N) = 0$, $N = 1$, получим из (11)

$$\sigma = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4\beta^2\lambda_{01}\lambda_{12}W_0W_1(1 - e^{-2\beta a})(1 + \lambda_{01}\lambda_{12}e^{-2\beta a})}}{2(1 + \lambda_{01}\lambda_{12}e^{-2\beta a})}, \tag{13}$$

$$B = \lambda_{01}W_0 + \lambda_{12}W_1 - \lambda_{01}\lambda_{12}e^{-2\beta a}(W_0 - W_1), \quad \lambda_{01} = (\mu_1 - \mu_0)(\mu_0 + \mu_1)^{-1},$$
$$\lambda_{12} = (\mu_2 - \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)^{-1}, \quad W_0 = 1 - kg(\rho_0 - \rho_1)(\mu_1 - \mu_0)^{-1} / w_*',$$
$$W_1 = 1 - kg(\rho_1 - \rho_2)(\mu_2 - \mu_1)^{-1} / w_*';$$

здесь μ_0, μ_1, μ_2 и ρ_0, ρ_1, ρ_2 — вязкость и плотность соответственно нефти, растворителя и вытесняющей жидкости, w_*' — скорость движения оторочки, a — ширина оторочки.

Автор благодарен В. Л. Данилову за ценные замечания при обсуждении настоящей работы.

Всесоюзный нефтегазовый
научно-исследовательский институт
Москва

Поступило
15 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Y. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, **201**, 159, 175, 192 (1950). [2] P. G. Saffman, G. Y. Taylor, Proc. Roy. Soc. A, **245**, 312 (1958). [3] В. П. Пилатовский, Укр. матем. журн., **10**, № 3 (1958). [4] R. L. Chuoke, P. Van Meurs, Trans. AIME, **216** (1959). [5] В. М. Рыжик, Б. Е. Кисиленко, Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений, М., 1969, стр. 82. [6] В. М. Рыжик, И. А. Чарный, Чэнь Чжун-сян, Изв. АН СССР, ОТИ, Механика и машиностроение, № 1 (1961). [7] В. Л. Данилов, А. Н. Коновалов, С. И. Якуба, ДАН, **183**, № 2 (1968). [8] В. Л. Данилов, Р. М. Кац, ДАН, **201**, № 2 (1971). [9] Р. Бетчов, В. Криминале, Вопросы гидродинамической устойчивости, М., 1971. [10] Линь Цзя-Цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, М., 1958.