Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 519.212.3

МАТЕМАТИКА

Р. В. АМБАРЦУМЯН

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ БЮФФОНА — СИЛЬВЕСТРА В R^3

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 X 1972)

В 1890 г. Дж. Сильвестром (1) рассматривалось следующее видоизменение классической задачи Бюффона об игле:

На плоскости фиксировано n игл (прямолинейных отрезков). Найти инвариантную меру множества всех прямых на плоскости (см. (2)), которые:

а) пересекают хотя бы одну из игл,

б) пересекают все иглы.

Согласно Сильвестру (1), эти меры являются «диофантовыми линейными функциями сторон полной $2n$-угольной фигуры, с углами в n парах концов игл».

Что касается коэффициентов упомянутой диофантовой функции, то Сильвестр ограничивается замечанием: «сложность случая $n=3$ такова, что требуется отдельное исследование только для того, чтобы получить совершенную классификацию» возможных расположений.

Решение задач а) и б) по существу было получено в (3) и (4). Некоторые следствия решения б) рассмотрены в (5).

В настоящей заметке приводится решение несколько более общей задачи.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество ориентированных плоскостей в R^3, $M(\cdot)$ — нормированная инвариантная мера на $\mathfrak{M}$ (см. (2)), $\{P_i\}$ — фиксированная совокупность точек в P^3. Положим

$$A_i = \{G \in \mathfrak{M};\ P_i \in \hat{G}\},$$

где $\hat{G}$ — положительное полупространство, ограниченное $G \in \mathfrak{M}$. Через $\mathscr{A}$ обозначим минимальную алгебру подмножеств $\mathfrak{M}$, содержащую все A_i, $i=1,\ldots,n$, через $\mathscr{A}^0$ — кольцо элементов из $\mathscr{A}$, для которых $M(\cdot) < \infty$.

Задача состоит в вычислении $M(A)$ для $A \in \mathscr{A}^0$.

Цитированный выше принцип Сильвестра имеет силу и в этой более общей ситуации, а именно: для каждого $A \in \mathscr{A}^0$

$$M(A) = \sum_{i<j} c_{ij}\rho_{ij}, \tag{1}$$

где ρ_{ij} — расстояние между P_i и P_j (диофантовость не имеет места, если совокупность $\{P_i\}$ не расположена на одной плоскости).

Перейдем к определению коэффициентов c_{ij}. Будем предполагать при этом, что в $\{P_i\}^n$ никакие три точки не лежат на одной прямой.

Положение ориентированной плоскости, проходящей через точки P_i и P_j, определяется заданием угла $\Phi \in (0, 2\pi)$ ее поворота около оси P_iP_j. Соответствующую плоскость будем обозначать через $G_{i,j,\Phi}$.

Индикатор (характеристическую функцию) множества $A \in \mathfrak{M}$ будем обозначать через $I_A(\cdot)$.

Рассмотрим предельные значения $I_A(G)$, когда $G \to G_{i,j,\Phi}$. Мы будем различать четыре возможности такого предельного перехода. Соответственно введем обозначения:

$$I_A(\Phi, \overset{+}{i}, \overset{+}{j}) = \lim I_A(G), \quad \text{если } G \in A_i A_j,$$
$$I_A(\Phi, \overset{-}{i}, \overset{-}{j}) = \lim I_A(G), \quad \text{если } G \in \bar{A}_i \bar{A}_j,$$
$$I_A(\Phi, \overset{-}{i}, \overset{+}{j}) = \lim I_A(G), \quad \text{если } G \in \bar{A}_i A_j,$$
$$I_A(\Phi, \overset{+}{i}, \overset{-}{j}) = \lim I_A(G), \quad \text{если } G \in A_i \bar{A}_j;$$

$\bar{A}$ означает дополнение к A в $\mathfrak{M}$.

Т е о р е м а. *Если никакие три точки из* $\{P_i\}$ *не лежат на одной прямой, то для любого* $A \in \mathscr{A}^0$

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [I_A(\Phi, \overset{-}{i}, \overset{+}{j}) + I_A(\Phi, \overset{+}{i}, \overset{-}{j}) - I_A(\Phi, \overset{+}{i}, \overset{+}{j}) - I_A(\Phi, \overset{-}{i}, \overset{-}{j})]\, d\Phi. \tag{2}$$

Приведем несколько примеров использования «комбинаторной» формулы (1), (2).

а) С к о п л е н и е т о ч е к в R^3. Пусть в R^3 фиксировано скопление точек $\{P_i\}_1{}^n$. Положим

$$a_k = \{G; \text{ число точек в } \hat{G} \cap \{P_i\}_1{}^n \text{ равно } k\}, \quad k \geqslant 0.$$

Очевидно, $a_k \in \mathscr{A}^0$ для всех $1 \leqslant k < n$.

Введем функцию

$$N_{ij}(\Phi) = \text{число точек в } \hat{G}_{i,j,\Phi}, \text{ не считая } P_i \text{ и } P_j.$$

Положим

$$f_k = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \rho_{ij} \int_0^{2\pi} \delta_k(N_{ij}(\Phi))\, d\Phi;$$

здесь и ниже

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = x, \\ 0, & \text{если } k \neq x. \end{cases}$$

Формула (1), (2) принимает вид

$$M(a_k) = 2f_{k-1} - f_k - f_{k-2}. \tag{3}$$

В случае плоскости это равенство было обнаружено в ([5]). Аналогично тому, как это сделано в ([5]), (3) применяется для оценки среднего «периметра» минимальной выпуклой оболочки случайно выбранного r-подскопления скопления $\{P_i\} \subset R^3$.

б) П е р е с е ч е н и е м н о г о г р а н н и к а с л у ч а й н о й п л о с к о с т ь ю. Пусть B — выпуклый многогранник в R^3, $\{P_i\}$ — совокупность его вершин. Положим

$$a_k = \{G; \ G \cap B \text{ является } k\text{-угольником}\}.$$

Очевидно, $a_k \in \mathscr{A}^0$ при $k > 0$. Приведем результат вычисления $M(a_k)$ с помощью (1), (2) при дополнительном упрощающем предположении, что в каждой вершине B сходятся только три ребра.

Пусть $t_{ij}(\varphi)$ — неориентированная плоскость, проходящая через точки P_i и P_j, $\varphi \in (0, \pi)$ есть угол ее поворота около P_iP_j.

$$N_{ij}(\varphi) = \text{число сторон многоугольника } t_{ij}(\varphi) \cap B.$$

Выделим следующие зависящие от пары номеров i, j подмножества интервала $(0, \pi)$.

Для пары P_iP_j, определяющей ребро многогранника B, положим

$$R_{ij} = \{\varphi;\ t_{ij}(\varphi) \text{ пересекает внутренность } B\},$$

$$a_{ij} = \text{раствор угла } R_{ij}.$$

Если P_iP_j является диагональю многогранника B (лежащей на грани или же пересекающей внутренность B), положим

$$R_{ij}^+ = \{\varphi; \text{ в каждом из двух полупространств относительно } t_{ij}(\varphi) \text{ числа ребер, исходящих из } P_i \text{ и } P_j, \text{ равны}\};$$

$$R_{ij}^- = (0, \pi) - R_{ij}^+.$$

Ответ выражается через интегралы

$$\tau_k = 2 \int\limits_{R_{ij}} \delta_k (N_{ij}(\varphi))\, d\varphi, \quad \text{если } P_iP_j \text{ определяет ребро } B;$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_k^+ &= \int\limits_{R_{ij}^+} \delta_{k'} (N_{ij}(\varphi))\, d\varphi \\ \tau_k^- &= \int\limits_{R_{ij}^-} \delta_k (N_{ij}(\varphi))\, d\varphi \end{aligned}\right\}, \quad \text{если } P_iP_j \text{ определяет диагональ } B$$

(зависимость величин τ от номеров i, j не указана), следующим образом:

$$\begin{gathered} M(a_3) = \sum_{\text{ребра}} \rho_{ij} [2(\pi - a_{ij}) - \tau_3] + \sum_{\text{диагонали}} \rho_{ij} [\tau_3^- - \tau_3^+], \\ M(a_4) = \sum_{\text{ребра}} \rho_{ij} [\tau_3 - \tau_4 - (\pi - a_{ij})] + \sum_{\text{диагонали}} \rho_{ij} [2\tau_3^+ - \tau_4^+ - 2\tau_3^- + \tau_4^-], \\ M(a_k) = - \sum_{\text{ребра}} \rho_{ij} \Delta\tau_k - \sum_{\text{диагонали}} \rho_{ij} \Delta^2 (\tau_k^+ - \tau_k^-), \quad k \geqslant 5; \end{gathered} \tag{4}$$

здесь Δ и Δ^2 — операторы первой и второй разности. Отметим, что из (4) следуют известные равенства

$$M(\{G;\ G \cap B \neq 0\}) = \sum_{\text{ребра}} \rho_{ij} (\pi - a_{ij}),$$

$$\sum_k M(a_k) = 2\pi \sum_{\text{ребра}} \rho_{ij}.$$

в) Ряд следствий формулы (1), (2) возникает при переходе к математическим ожиданиям, когда предполагается, что совокупность $\{P_i\}$ в каком-то смысле случайна. Здесь мы приведем только один результат.

Срезом выпуклого тела $B \subset R^3$ вдоль плоскости G, $G \cap B \neq \varnothing$ назовем пару

$$D = G \cap B, \quad \bar{n}(P),$$

где $\bar{n}(P)$ есть внешняя нормаль к ∂B в точке $P \in \partial D$. Это определение соответствует представлению о срезе как об очень тонкой пластинке. Ее размеры и форма определяют D, а ненулевая толщина позволяет определить $\bar{n}(P)$ с помощью измерений, проводимых вдоль торцевой поверхности.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — множество неориентированных плоскостей в R^3, B — выпуклое тело. $S(G)$ — площадь области $G \cap B$, $G \in \mathfrak{M}_1$.

Нормаль к $G \in \mathfrak{M}_1$ называется внешней, если параллельная G плоскость G_1 со свойством $S(G_1) = S(G)$ лежит в отрицательном полупространстве.

Пара (S, Ω), где Ω — направление внешней нормали, вообще говоря, определяет положение $G \in \mathfrak{M}_1$, $G \cap B \neq \varnothing$; пишем $G = G(S, \Omega)$.

Важной характеристикой выпуклого тела B является функция $d(S, \Omega)$, равная расстоянию между $G(S, \Omega)$ и $G(S, -\Omega)$.

Положим

$$\Theta_S = \{\Omega; \text{существует } G(S, \Omega)\}, \quad S > 0;$$

ω — случайная точка, равномерно распределенная на Θ_S; E — соответствующее математическое ожидание.

Оказывается, если ∂B не имеет плоских участков, существует простой функционал F, определенный на множестве срезов, такой, что

$$E\,d(S, \omega) = EF[G(S, \omega)].$$

Функционал F имеет вид

$$F = \frac{1}{8} S^{-1} \frac{dp}{dS} \int \frac{\chi^3 \sin \xi_1 \sin \xi_2}{\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2} dg,$$

где dp — толщина среза, $dS > 0$ — разность между площадями двух оснований среза; интегрирование проводится по множеству $\{g\}$ всех прямых на плоскости среза, dg — элемент инвариантной меры на $\{g\}$. Под знаком интеграла χ есть длина хорды $D \cap g$, ξ_1 и ξ_2 (ε_1 и ε_2) суть углы между $\bar{n}$ и плоскостью среза (между $\bar{n}$ и g соответственно) в паре точек $\partial D \cap g$.

Институт математики
Академии наук АрмССР
Ереван

Поступило
10 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. J. Sylvester, Acta Math., 14, 185 (1890). [2] W. Blascke, Vorlesunger über Integralgeometrie Teubner, Leipzig, 1936. [3] Р. В. Амбарцумян, ДАН, 187, № 3 (1969). [4] Р. В. Амбарцумян, Изв. АН АрмССР, Математика, 5, № 3 (1970). [5] R. V. Ambartzumian, Studia Sci. Math. Hung., 6, 235 (1971).