Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 2

УДК 517.947 *МАТЕМАТИКА*

А. Е. МЕРЗОН

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КОНУСЕ

(*Представлено академиком П. С. Новиковым 3 XI 1972*)

Эта статья посвящена рассмотрению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в конусе, т. е. уравнений вида

$$A(D)g = f, \tag{1}$$

где $A(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а f — обобщенная функция из пространства $S'(K)$ всех медленно возрастающих обобщенных функций с носителями, содержащимися в K.

Наша цель — установить необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (1) в пространстве $S'(K)$ в двойственных относительно преобразования Фурье терминах. Для этого введем двойственное к $S'(K)$ пространство $\widetilde{S'(K)}$. Оно является пространством всех голоморфных на трубчатой области $\mathbf{R}^n + iK^*$ функций, удовлетворяющих некоторой оценке (P). Здесь K^* — конус, сопряженный к K относительно скалярного произведения в $\mathbf{R}^n$. Применив преобразование Фурье к уравнению (1), получим эквивалентное уравнение

$$\tilde{A}(z)\tilde{g}(z) = \tilde{f}(z), \tag{2}$$

где $\tilde{f} \in \widetilde{S'(K)}$, $\tilde{A}(z)$ — многочлен. Разрешимость уравнения (2) в $\widetilde{S'(K)}$ эквивалентна разрешимости уравнения (1) в $S'(K)$. Ясно, что необходимым условием разрешимости (2) в $\widetilde{S'(K)}$ является условие

$$\tilde{f} \in I(\tilde{A}), \tag{3}$$

где $I(\tilde{A})$ — идеал, порожденный $\tilde{A}$ в кольце $H(\mathbf{R}^n + iK^*)$ всех голоморфных функций на множестве $\mathbf{R}^n + iK^*$.

Основной результат нашей статьи состоит в том, что условие (3) является достаточным для разрешимости уравнения (2) в $\widetilde{S'(K)}$ при этом условии частное от деления $\tilde{f} \in \widetilde{S'(K)}$ на $\tilde{A}(z)$ принадлежит $\widetilde{S'(K)}$. Мы не накладываем никаких условий на многочлен $\tilde{A}(z)$ и, таким образом, обобщаем соответствующий результат А. И. Комеча, который доказал аналогичное утверждение в предположении строгой эллиптичности $\tilde{A}$.

Переходим к точным определениям. Предположим, что K — замкнутый выпуклый конус в пространстве $\mathbf{R}^n$ такой, что $K \setminus \{0\}$ лежит в некотором открытом полупространстве пространства $\mathbf{R}^n$. Пусть

$$K^* = \{x \in \mathbf{R}^n \colon \ (x, y) > 0 \quad \text{для всех} \quad y \in K\}$$

— сопряженный к K конус. В силу условия на K K^* — непустое открытое множество. Тогда $\mathbf{R}^n + iK^* = CK^*$ — область в пространстве $\mathbf{C}^n$. Известно (см., например, ([1–3])), что функции из $\widetilde{S'(K)}$ обладают локальной плотностью $\tilde{f}(z)$, голоморфной в CK^*, и удовлетворяют оценке

$$|\tilde{f}(z)| \leqslant c\rho(z)^{-\nu}(1+|z|)^{\mu}, \quad z \in CK^*; \tag{P}$$

здесь $\rho(z) = \rho(\operatorname{Im} z)$ есть расстояние от z до границы CK^* (или расстояние от $\operatorname{Im} z$ до границы K^*); $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$, $c, \nu, \mu > 0$.

Обозначим множество функций из $H(CK^*)$, удовлетворяющих оценке вида (P), через $HP(CK^*)$. По теореме Пэли — Винера $\widetilde{S'(K)} = HP(CK^*)$ (доказательство см. в ([1], [3])). Следовательно, разрешимость уравнения (1) в $S'(K)$ эквивалентна разрешимости (2) в $HP(CK^*)$.

Как уже отмечалось, необходимым условием разрешимости уравнения (2) является условие (3). Мы докажем следующую основную теорему.

Теорема А. *Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $A(D)g = f$, где $A(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $f \in S'(K)$.*

Это уравнение разрешимо в пространстве $S'(K)$ в том и только том случае, когда $\tilde{f} \in I(\tilde{A})$.

Из сказанного выше следует, что для доказательства теоремы А достаточно установить, что если $\tilde{f} \in HP(CK^*)$, $\tilde{f} = \tilde{A}\tilde{g}$, $\tilde{g} \in H(CK^*)$, то $\tilde{g} \in HP(CK^*)$. Мы докажем несколько более общее утверждение. Пусть V — открытое множество в $\mathbf{C}^n$; $HP(V)$ — множество голоморфных в V функций с оценкой

$$|f(z)| \leqslant c\rho(z)^{-\nu}(1+|z|)^{\mu}, \quad z \in V, \tag{P$'$}$$

где $\rho(z)$ — расстояние от z до границы V.

Теорема Б. *Если $\tilde{f} \in HP(V)$, $\tilde{f} = \tilde{A}\tilde{g}$, $\tilde{g} \in H(V)$, то $\tilde{g} \in HP(V)$.*

Будем доказывать эту теорему по следующему плану. Сначала предположим, что для некоторых определенных констант c_1, ν_1, μ_1 найдется точка $z^0 \in V$ такая, что оценка (P$'$) не выполняется в точке z^0. Затем построим точку $t^1 \in V$, достаточно близкую к z^0, чтобы $|t^1|$ и $\rho(t^1)$ мало отличались от $|z^0|$ и $\rho(z^0)$, но достаточно удаленную от точки z^0, чтобы $|\tilde{A}(t')|$ был больше, чем $|\tilde{A}(z^0)|$ (точнее, оценивался бы снизу через $\rho(z^0)$). Кроме того, с помощью теоремы о максимуме модуля для голоморфных функций мы подберем t^1 так, чтобы $|\tilde{g}(t')| \geqslant |\tilde{g}(z^0)|$. Из (3) получится тогда противоречие с оценкой (P$'$) для $\tilde{f}$ в точке t', которое докажет утверждение теоремы.

Итак, допустим, что для констант c_1, ν_1, μ_1, точное значение которых напишем ниже, найдется точка $z^0 \in V$ такая, что

$$|\tilde{g}(z^0)| > c_1\rho(z^0)^{-\nu_1}(1+|z^0|)^{\mu_1}. \tag{4}$$

Мы будем искать точку t^1 на некоторой комплексной прямой $l \subset \mathbf{C}^n$, проходящей через точку z^0, направление которой нужно выбрать так, чтобы обеспечилось увеличение $|\tilde{A}(z)|$.

Пусть

$$\tilde{A}(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} a_\alpha z^\alpha, \quad \tilde{A}_m(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha.$$

Обозначим $\lambda = \sup\limits_{z\in M} |\tilde{A}_m(z)|$, где $M = \{z \in \mathbf{C}^n\colon \ |z| = 1\}$. Очевидно, $\lambda \neq 0$, так как $\tilde{A} \not\equiv 0$. Тогда найдется точка $z' \in M$ такая, что $\tilde{A}_m(z') = \lambda$. Точка z' и задаст нам искомое направление для l.

Рассмотрим комплексную прямую $l = \{z^0 + \zeta z';\ \zeta \in \mathbf{C}\}$, проходящую через z^0 в направлении z', и многочлен от одной переменной ζ

$$\tilde{A}_{z^0, z'}(\zeta) = \tilde{A}(z^0 + \zeta z').$$

Нетрудно проверить, что $\tilde{A}_{z^0, z'}$ — многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным λ.

Теперь мы найдем контур γ' в l, все точки которого находятся от точки z^0 на расстоянии меньшем, чем $1/2\rho(z^0)$, на котором многочлен $\tilde{A}(z)$ оценивается через $\rho(z^0)$. Для этого докажем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $P(t)$ — многочлен от одной переменной степени m со старшим коэффициентом, равным 1; Π — квадрат с центром в точке O и со сторонами длины $1/2\rho(z^0)$, параллельными координатным осям.*

Тогда найдется непрерывный контур $\gamma \subset \Pi$, охватывающий точку O, такой, что если $t \in \gamma$, то

$$|P(t)| \geqslant \frac{\rho(z^0)^m}{12^m (m+2)^m}.$$

Доказательство. На равном расстоянии друг от друга проведем $m+1$ отрезков, параллельных стороне AB квадрата и заключенных между AB и координатной осью. Тогда найдется отрезок A_nB_n такой, что если $t \in A_nB_n$, то расстояние от t до каждого из корней больше $\rho(z^0)/(12(m+2))$. Действительно, в противном случае оказалось бы, что у многочлена $P(t)$ нашлось по крайней мере $m+1$ различных корней, а это не так, потому что степень P равна m.

Пусть

$$P(t) = (t - t_1)^{l_1} \dots (t - t_k)^{l_k},$$

где $t_1, \dots, t_k$ — корни P, $l_1 + \dots + l_k = m$. Тогда для $t \in A_nB_n$

$$|P(t)| \geqslant \frac{\rho(z^0)^m}{12^m (m+2)^m}. \tag{5}$$

Проделаем аналогичную операцию с остальными тремя сторонами, выделив там свои отрезки, все точки которых удовлетворяют неравенству (5). В результате получим прямоугольный контур, лежащий в Π и удовлетворяющий всем требованиям леммы. Доказательство закончено.

Переходим к доказательству теоремы Б. Предположим, что для констант

$$c_1 = c \cdot 2^{\mu+\nu+1}(1+s)^{\mu} \cdot 12^m (m+2)^m \lambda^{-1}, \qquad \nu_1 = \nu + m, \qquad \mu_1 = \mu, \tag{6}$$

найдется точка $z^0 \in V$ такая, что выполняется неравенство (4). Здесь λ зависит только от $\tilde{A}$, а s — такое положительное число, что

$$\rho(z) \leqslant |z| + s \tag{7}$$

для всех $z \in V$ (такое число существует, потому что если $a \in \partial V$, то $\rho(z) \leqslant |z - a| \leqslant |z| + |a|$).

Пользуясь леммой, найдем контур $\gamma \in \mathring{\Pi}$ такой, что для $t \in \gamma$

$$|\tilde{A}_{z_0, z'}(t)| \geqslant \frac{\lambda \rho(z^0)^m}{12^m (m+2)^m}. \tag{8}$$

Это можно сделать, предварительно поделив $\tilde{A}_{z^0, z'}$ на $\lambda \neq 0$. Рассмотрим множество $\gamma' = \{z^0 + \zeta z' \mid \zeta \in \gamma\}$. Тогда γ' — контур в l, охватывающий точку z^0 и лежащий в V. Действительно, $|\zeta| < 1/2\rho(z^0)$ для $\zeta \in \gamma$, а шар с центром в точке $z \in V$ и радиуса $1/2\rho(z)$ лежит в V. Заметим, что если $z \in \gamma'$, то

$$\rho(z) \geqslant 1/2\rho(z^0), \tag{9}$$

как следует из неравенства треугольника. Из голоморфности $\tilde{g}$ в V вытекает, что найдется $\zeta_0 \in \gamma$ такая, что

$$|\tilde{g}(z^0 + \zeta^0 z')| \geqslant |\tilde{g}(z^0)|. \tag{10}$$

Положим $t^1 = z^0 + \zeta_0 z' \in \gamma$. В силу (P′)

$$|\tilde{f}(t^1)| \leqslant c\rho(t')^{-\nu}(1+|t'|)^{\mu}. \tag{11}$$

Из (9) и (7) получим

$$|\tilde{f}(t')| \leqslant c\rho(z^0)^{-\nu}\cdot 2^{\nu}\cdot 2^{\mu}(1+s)^{\mu}(1+|z^0|)^{\mu}. \tag{12}$$

С другой стороны, из (8) и (10) следует, что

$$|\tilde{f}(t')| = |\tilde{A}(t')|\,|\tilde{g}(t')| \geqslant \frac{\lambda\rho(z^0)^m}{12^m(m+2)^m}\,|\tilde{g}(z^0)|.$$

Используя неравенство (4) и вид констант (6), получим

$$|\tilde{f}(t')| > \frac{\lambda\rho(z^0)^m}{12^m(m+2)^m}\,c\cdot 2^{\mu+\nu+1}(1+s)^{\mu}\cdot 12^m(m+2)^m\lambda^{-1}\rho(z^0)^{-\nu-m}(1+|z^0|)^{\mu} =$$
$$= c\cdot 2^{\mu+\nu+1}(1+s)^{\mu}\rho(z^0)^{-\nu}(1+|z^0|)^{\mu},$$

а это противоречит (12). Значит, точки z^0, для которой выполняется неравенство (4), не существует, т. е. $\tilde{g} \in HP(V)$. Теорема Б доказана.

Выражаю благодарность А. И. Комечу за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило 4 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», 1964. [2] С. Г. Гиндикин, Функциональн. анализ, 6, № 2 (1972). [3] L. Schwartz, Medd. Lunds Univ. mat. sem. (suppl.), 1952, p. 196.