**Доклады Академии наук СССР**
**1973. Том 210, № 6**

*ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

**В. А. БАБЕШКО**

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

*(Представлено академиком И. Н. Векуа 23 X 1972)*

1. Обоснование единственности решения задач о вынужденных колебаниях упругих тел, занимающих области с бесконечно удаленными точками, вообще говоря, не вкладывается в энергетические методы, используемые в случае задачи Коши. Для доказательства единственности в задачах колебания приходится прибегать к установлению тонких свойств решений уравнения Гельмгольца в соответствующей неограниченной области ([1-5]).

Столь же своеобразным является установление единственности решений интегральных уравнений задач о колебании жестких штампов на поверхности упругого слоя. В работе ([6]) сформулирована теорема единственности в плоском случае. Наличие теоремы единственности позволяет просто устанавливать и разрешимость соответствующих интегральных уравнений.

Ниже приводится доказательство теорем единственности и в пространственных случаях.

2. Ряд задач о колебании штампов на поверхности упругого слоя, примеры которых даются ниже, приводятся одним из методов, сформулированным в ([6]), к решению интегральных уравнений вида (плоский случай и случай круглого неосесимметричного штампа соответственно)

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\, q(\xi)\, d\xi = f(x), \quad |x| \leqslant a, \quad k(x) = \int_{\sigma} K(u)\, e^{iux} du, \tag{1}$$

$$\int_{0}^{a} k(r, \rho)\, q(\rho)\, \rho\, d\rho = f(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \quad k(r, \rho) = \int_{\sigma_1} K(u)\, u J_n(ur)\, J_n(u\rho)\, du; \tag{2}$$

здесь функция $K(u)$ четная, вещественная на вещественной оси, аналитическая в комплексной плоскости и может иметь конечное число однократных вещественных нулей $z_m$ и полюсов $\zeta_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$; при $u \to \infty$ она убывает как $u^{-1}$. Контур $\sigma$ расположен на вещественной оси и отклоняется от нее, лишь обходя отрицательные полосы сверху, а положительные снизу. Контур $\sigma_1$ есть часть контура $\sigma$, лежащая в правой полуплоскости. $J_{(n)}(z)$ — функции Бесселя, $n$ — целое число.

Основная теорема о единственности решений уравнений (1), (2) имеет следующую формулировку.

Теорема 1. *Пусть вычеты функции* $K(u)$ *в положительных полюсах одного знака. Тогда в* $L_\alpha$, $\alpha > 1$, *уравнения* (1), (2) *не могут иметь более одного решения.*

3. Для доказательства теоремы 1 понадобятся две леммы, устанавливаемые ниже.

Положим

$$Q(u)=\int_{-a}^{a} q(x)\, e^{iux} dx, \quad Q_n(u)=\int_{0}^{a} q(\rho)\,\rho J_n(u\rho)\, d\rho,$$

$$\Pi(u)=\prod_{k=1}^{p}(u^2-z_k^2)(u^2-\zeta_k^2)^{-1}, \quad \operatorname{Im}\zeta_k=0,$$

$$2\pi t(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(u)\, Q(u)\, e^{-iux}\, du, \tag{3}$$

$$T(r)=\int_{0}^{\infty}\Pi(u)\, Q_n(u)\, J_n(ur)\, u\, du. \tag{4}$$

Лемма 1. *Пусть* $q(x)\in L_\alpha(-a,a)$, $\alpha>1$, *и* $Q(\pm\zeta_k)=0$, $k=1,2,\ldots,p$. *Тогда* $t(x)\in L_\alpha(-a,a)$, $\alpha>1$, *и* $t(x)\equiv 0$ *при* $|x|>a$.

Для доказательства, непосредственно вычисляя $t(x)$ по формуле (3), получим

$$\begin{gathered} t(x)=q(x)+\sum_{k=1}^{p} s_k\int_{-a}^{a}\sin\zeta_k|x-y|\, q(y)\, dy, \\ s_k=-0{,}5\prod_{r=1}^{p}{}'(\zeta_k^2-z_r^2)(\zeta_k^2-\zeta_r^2)^{-1}\zeta_k^{-1}. \end{gathered} \tag{5}$$

Раскрывая знаки модулей в (5) на каждом из участков $|x|\leqslant a$ и $|x|>a$ и используя условия леммы, без труда получаем ее доказательство.

Лемма 2. *Пусть* $g(r)\in L_\alpha(0,a)$, $\alpha>1$, *и* $Q_n(\zeta_k)=0$, $k=1,2,\ldots,p$. *Тогда* $T(r)\in L_\alpha(0,a)$, $\alpha>1$, *и* $T(r)\equiv 0$ *при* $r>a$.

Для доказательства, вычисляя $T(r)$ по формуле (4), получим

$$T(r)=q(r)+\sum_{k=1}^{p}\pi s_k\zeta_k\int_{0}^{a}\alpha_k(\rho,r)\, q(\rho)\,\rho\, d\rho, \tag{6}$$

$$\alpha_k(\rho,r)=\begin{pmatrix} J_n(\zeta_k\rho)\, N_n(\zeta_k r), & r>\rho \\ J_n(\zeta_k r)\, N_n(\zeta_k\rho), & r<\rho\end{pmatrix},$$

$N_n(z)$ — функция Неймана.

Из представления (6) непосредственно следует доказательство леммы 2.

4. Для доказательства теоремы 1 покажем, что однородные ($f\equiv 0$) уравнения (1), (2) имеют в $L_\alpha$ лишь тривиальные решения. Допуская существование у однородных уравнений (1), (2) нетривиальных решений, умножим их на комплексно-сопряженные решения $\bar q$ и проинтегрируем первое на $[-a,a]$, второе на $[0,a]$. Совмещая после этого контуры интегрирования $\sigma,\sigma_1$ непрерывной деформацией с вещественной осью и переходя к интегралам в смысле главного значения, для уравнений (1), (2) соответственно получим

$$\begin{gathered} \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}K(u)\,|Q(u)|^2\, du+i\pi\sum_{r=1}^{p}\{[K^{-1}(\zeta_r)]'\}^{-1}[|Q(\zeta_r)|^2+|Q(-\zeta_r)|^2]=0, \\ \text{v.p.}\int_{0}^{\infty}K(u)\,|Q_n(u)|^2\, u\, du+i\pi\sum_{r=1}^{p}\{[K^{-1}(\zeta_r)]'\}^{-1}|Q_n(\zeta_r)|^2\zeta_r=0. \end{gathered} \tag{7}$$

Разделяя вещественные и мнимые составляющие соотношений (7) и используя условия теоремы, отсюда получаем, что

$$Q(\pm\zeta_k)=0,\quad Q_n(\zeta_k)=0,\quad k=1,2,\ldots,p.$$

Применяя теперь к функциям $q(x)$, $q(r)$ леммы 1, 2 соответственно, однородные уравнения (1), (2) можно представить в виде

$$\int_{-a}^{a} k_1(x-\xi)\,t(\xi)\,d\xi=0,\qquad \int_{0}^{a} k_1(r,\rho)\,T(\rho)\,\rho\,d\rho=0. \tag{8}$$

Ядра уравнений (8) даются соотношениями (1), (2), в которых функция $K(u)$ заменена на $K_1(u)$ вида $K_1(u)=K(u)\Pi^{-1}(u)$. Участвующая в этом представлении функция $\Pi(u)$ имеет в качестве нулей и полюсов вещественные нули $z_m$ и полюса $\zeta_m$ функции $K(u)$. Из условий теоремы легко установить, что число вещественных нулей равно или на один меньше числа полюсов. В последнем случае в качестве $z_p$ достаточно в представлении (2) взять любое чисто мнимое число.

Таким образом, функции $K_1(u)$ является непрерывной и знакопостоянной на всей вещественной оси.

Для завершения доказательства теоремы остается добавить, что в этом случае левые части соотношений (8) порождают в гильбертовом пространстве $H(1)$ положительно определенные операторы и, кроме того, $H(1)\supset L_\alpha$, $\alpha>1$. Теорема 1 доказана.

Аналогично теореме 1 доказывается и теорема единственности для интегрального уравнения вида

$$\iint_{\Omega} k(x-\xi,\,y-\eta)\,q(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=f(x,y),\quad x,y\in\Omega, \tag{9}$$

$$k(x,y)=\int_{\sigma_1} K(u)\,uJ_0(uR)\,du,\quad R=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Теорема 2. *Пусть $\Omega$ — выпуклая область с кусочно-гладкой границей, а вычеты функции $K(u)$ в положительных полюсах одного знака. Тогда в $L_\alpha(\Omega)$, $\alpha>1$, уравнение* (9) *не может иметь более одного решения.*

Замечание. Условия теорем 1, 2, очевидно, будут выполняться, если положительные нули и полюса чередуются на вещественной оси и число нулей не превышает числа полюсов.

5. Примеры. 1) Задача об антиплоском колебательном сдвиге полосовым штампом упругого слоя ([7]) и задача о крутильных колебаниях круглого штампа на поверхности слоя. Обе задачи приводятся к уравнениям (1), (2), в которых функция $K(u)$ соответственно для случая закрепленного или свободного слоя дается соотношениями

$$K(u)=\theta_2^{-1}\operatorname{th}\theta_2,\quad K(u)=\theta_2^{-1}\operatorname{cth}\theta_2,\quad \theta_k=\sqrt{u^2-\varkappa_k^2},$$
$$\varkappa_2^2=\mu^{-1}\omega^2h^2\rho,\quad \varkappa_1^2=(\lambda+2\mu)^{-1}\omega^2h^2\rho;$$

здесь $\lambda$, $\mu$ — коэффициенты Ляме материала слоя, $\rho$, $h$ — соответственно его плотность и высота, $\omega$ — частота колебаний штампа.

2) Задача о сжатии слоя двумя встречно колеблющимися одинаковыми штампами в форме полосы или круга (трение в области контакта отсутствует):

$$K(u)\equiv H(u,\operatorname{sh},\operatorname{ch})=R^{-1}(u,\operatorname{sh},\operatorname{ch})\,\theta_1\operatorname{sh}\theta_1\operatorname{sh}\theta_2,$$
$$R(u,\operatorname{sh},\operatorname{ch})=u^2\theta_1\theta_2\operatorname{sh}\theta_1\operatorname{ch}\theta_2-(u^2-0{,}5\varkappa_2^2)^2\operatorname{ch}\theta_1\operatorname{sh}\theta_2.$$

3) Задача об изгибе слоя двумя односторонне колеблющимися одинаковыми штампами при отсутствии трения:

$$K(u) \equiv H(u, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}).$$

4) Задача о сдвиге слоя двумя симметричными горизонтально колеблющимися штампами при отсутствии нормального контактного напряжения (симметричный и кососимметричный случаи):

$$K(u) \equiv M(u, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}) = R^{-1}(u, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})\,\theta_2 \,\mathrm{ch}\,\theta_1 \,\mathrm{ch}\,\theta_2,$$

$$K(u) \equiv M(u, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}).$$

Чередование нулей и полюсов в примере 1) проверяется непосредственно.

Распределение нулей и полюсов функций $K(u)$ в примерах 2)—4) изучалось в ряде работ (см., например, ([8])). Исследование распределения лишь вещественных нулей и полюсов не представляет труда. Нетрудно убедиться, что чередование нулей и полюсов функций $K(u)$ в примерах 2)—4) имеет место при всех $0 < \varkappa_2 < \infty$, $0 < \varepsilon^2 < 0{,}5$, $\varepsilon^2 = \varkappa_1^2\varkappa_2^{-2}$, за исключением отрезков $[\alpha_k, \mu_1(k)]$, $[\beta_k, \mu_2(k)]$ длиной не более $\pi/2$, которые распределены на вещественной оси по закону

$$\mu_1(k) = \pi\varepsilon^{-1}(k-0{,}5), \quad \mathrm{ctg}\,\mu_1(k) < -\mu_1(k)\,/\,(8\varepsilon^2);$$

$$\mu_2(k) = \pi k, \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon\mu_2(k) > \mu_2(k)\,/\,(8\varepsilon)$$

для задач 2), 4) (симметричный случай);

$$\mu_1(k) = \pi\varepsilon^{-1}k, \quad \mathrm{tg}\,\mu_1(k) > \mu_1(k)\,/\,(8\varepsilon^2);$$

$$\mu_2(k) = \pi(k-0{,}5), \quad \mathrm{ctg}\,\varepsilon\mu_2(k) < -\mu_2(k)\,/\,(8\varepsilon)$$

для задач 3), 4) (кососимметричный случай)

Случаи, когда $\varkappa_2 \in [\alpha_k, \mu_1(k)]$, $[\beta_k, \mu_2(k)]$, в настоящей заметке не рассматриваются. При этих значениях параметра $\varkappa_2$ ядра (1), (2) интегральных уравнений имеют иное представление. Отметим, что эти исключительные значения параметра $\varkappa_2$ встречаются крайне редко. Например, при $\nu = 0{,}3$ и при $0 \leqslant \varkappa_2 \leqslant 100$ исключительными являются значения $\varkappa_2 \in [\alpha, \mu_1] \subset [1{,}57;\ 2{,}94]$, $\varkappa_2 \in [\beta, \mu_2] \subset [42{,}39;\ 43{,}96]$ в случае задач 2), 4) и $\varkappa_2 \in [\alpha, \mu_1] \subset [21{,}98;\ 23{,}48]$ в случае задач 3), 4).

Результаты вошли в доклад, сделанный на XIII Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике в Москве.

Автор благодарит И. И. Воровича за внимание к работе и советы.

Институт механики и прикладной математики
Ростов-на-Дону

Поступило
25 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, ДАН, 80, № 3 (1951). [2] И. Н. Векуа, Тр. Тбилисского матем. инст., 12 (1943). [3] В. Д. Купрадзе, УМН, 88, № 3 (53) (1953). [4] В. Д. Купрадзе, Методы потенциала в теории упругости, М., 1963. [5] А. Г. Свешников, ДАН, 73, № 5 (1950). [6] В. А. Бабешко, ДАН, 201, № 3 (1971). [7] В. А. Бабешко, ПММ, 33, в. 1 (1969). [8] D. S. Potter, C. D. Leedham, J. Acoust. Soc. Am., 41, № 1 (1967).