Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 2

УДК 532.516.5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Л. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

О ПРИМЕНИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

(*Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 X 1972*)

Вводятся условия, необходимые для удовлетворительной аппроксимации разностными уравнениями уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнений Навье — Стокса). При выполнении этих условий решения разностных уравнений сохраняют качественные особенности поведения решений уравнений Навье — Стокса также и в закритической области и могут моделировать поэтому турбулентное течение жидкости. Рассматривается течение жидкости между параллельными пластинами и на этом примере оценивается сложность реализации этой модели.

1. Для уравнений Навье — Стокса рассмотрим краевую задачу с заданными начальными и некоторыми граничными условиями (задача 1). Для приближенного решения задачи 1 применяют разностные уравнения, связывающие приближенное решение — значения скорости $\mathbf{u} = \{u, v, w\} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$ и давления $p(t, x, y, z)$ — в точках разностной сетки в систему нелинейных уравнений. Эти уравнения должны аппроксимировать на сетке уравнения Навье — Стокса и соответствующие граничные и начальные условия.

Нелинейность задачи 1 и разностных уравнений не позволяет ни оценить точность приближенного решения, ни даже установить достаточно надежно границы для параметров разностного метода, в которых приближенное решение сохраняет характерные особенности решений уравнений Навье — Стокса. Особенно важно понять, каким условиям должен удовлетворять разностный метод в области неустойчивости стационарных решений уравнений Навье — Стокса.

2. Укажем путь, следуя которому можно в принципе получить условия, необходимые для удовлетворительной аппроксимации задачи 1 разностными уравнениями.

Пусть нам известно решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(t, x, y, z)$, $p = p_0(t, x, y, z)$ уравнений Навье — Стокса, характерное для задачи 1. Линеаризуем задачу 1 и разностные уравнения, считая, что их решения мало отличаются от $\mathbf{u}_0$, p_0, и удерживая в этих уравнениях лишь члены, линейные относительно $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, $p - p_0$.

В результате линеаризации уравнения задачи 1 становятся системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, для которой ставятся некоторые линейные краевые условия, а разностные уравнения — системой линейных уравнений.

Необходимым условием аппроксимации разностными уравнениями уравнений Навье — Стокса является требование близости спектральных характеристик этих двух линейных задач в характерной для задачи 1 области спектра. Это требование устанавливает допустимые значения параметров разностного метода, как правило — величину шагов по пространству и времени.

В случае расчета течений при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ ($\mathrm{Re}_{\text{кр}}$ — критическое число Рейнольдса) характерной областью спектра следует считать его часть, соответствующую нарастанию возмущений (т. е. область неустойчивости). Требование близости спектральных характеристик в области неустойчивости является очень сильным и, как мы увидим ниже, необходим большой объем вычислительной работы для приближенного решения задачи 1.

3. Применим указанную схему исследования к разностному методу решения задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными пластинами *. Будем рассматривать только двумерные течения. Величины $\mathbf{u}_0$, p_0 берем из плоского течения Пуазейля:

$$\mathbf{u}_0 = \{U_0(y),\ 0,\ 0\}, \quad U_0(y) = 1 - y^2, \quad p_0 = -2x\,\mathrm{Re}, \quad \text{где} \quad \mathrm{Re} = 1/\nu.$$

Введем в рассмотрение вектор $\mathfrak{f} = \{\tilde{u},\ \tilde{v},\ \tilde{\omega},\ \tilde{\pi}\}$, где $\mathbf{u} = \{u,\ v,\ 0\}$, $\omega = v_x - u_y$, $\pi = p + (u^2 + v^2)/2$ $(\rho_0 = 1)$, $\tilde{u} = u - U_0(y)$, $\tilde{v} = v - v_0 = v$, $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$, $\tilde{\pi} = \pi - \pi_0$, и будем искать решение линеаризованной задачи 1 в виде $\mathfrak{f}(t,\ x,\ y) = \mathfrak{f}(y)\exp\{i\alpha(x - ct)\}$. Мы приходим к следующей задаче, эквивалентной краевой задаче для уравнения Орра — Зоммерфельда: найти зависимость $c = c(\alpha,\ \mathrm{Re})$ с максимальной $\mathrm{Im}\,c$, при которой система уравнений

$$d\mathfrak{f}/dy = A(y)\,\mathfrak{f}, \qquad A(y) = \begin{Vmatrix} 0 & i\alpha & -1 & 0 \\ -i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ i\alpha c/\nu & \Omega_0/\nu & 0 & -i\alpha/\nu \\ -\Omega_0 & i\alpha c & i\alpha\nu - U_0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \Omega_0 = -U_0'(y) = 2y, \tag{1}$$

имеет нетривиальное решение $\mathfrak{f}(y)$, удовлетворяющее краевым условиям $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ при $y = \pm 1$. Наиболее полное решение основной спектральной задачи для уравнения Орра — Зоммерфельда было дано Линем, который показал, что при $\mathrm{Re} > 5700$ существует область значений α, в которой $\mathrm{Im}\,c(\alpha,\ \mathrm{Re}) > 0$, что соответствует росту собственных функций и неустойчивости течения Пуазейля.

Рассмотрим теперь схему второго порядка по пространственным переменным, разработанную Б. Д. Моисеенко и автором для расчета течений, близких к течению Пуазейля:

$$\begin{gathered}
\frac{u^l_{m\,n+1/2} - u^{l-1}_{m\,n+1/2}}{\tau} + \frac{\pi^l_{m+1/2\,n+1/2} - \pi^l_{m-1/2\,n+1/2}}{h} - \frac{\omega^l_{m\,n}}{4}\left(v^{l-1}_{m-1/2\,n} + v^{l-1}_{m+1/2\,n}\right) - \\
- \frac{\omega^l_{m\,n+1}}{4}\left(v^{l-1}_{m-1/2\,n+1} + v^{l-1}_{m+1/2\,n+1}\right) = -\frac{\nu}{g}\left(\omega^l_{m\,n+1} - \omega^l_{m\,n}\right); \\
\frac{v^l_{m+1/2\,n} - v^{l-1}_{m+1/2\,n}}{\tau} + \frac{\pi^l_{m+1/2\,n+1/2} - \pi^l_{m+1/2\,n-1/2}}{g} + \frac{\omega^l_{m+1\,n}}{4}\left(u^{l-1}_{m+1\,n+1/2} + u^{l-1}_{m+1\,n-1/2}\right) + \\
+ \frac{\omega^l_{m\,n}}{4}\left(u^{l-1}_{m\,n+1/2} + u^{l-1}_{m\,n-1/2}\right) = \frac{\nu}{h}\left(\omega^l_{m+1\,n} - \omega^l_{m\,n}\right); \qquad (2) \\
\frac{u^l_{m+1\,n+1/2} - u^l_{m\,n+1/2}}{h} + \frac{v^l_{m+1/2\,n+1} - v^l_{m+1/2\,n}}{g} = 0; \\
\frac{v^l_{m+1/2\,n} - v^l_{m-1/2\,n}}{h} - \frac{u^l_{m\,n+1/2} - u^l_{m\,n-1/2}}{g} = \omega^l_{m\,n};
\end{gathered}$$

здесь h и g — шаги сетки по переменным x и y, τ — шаг по времени. К этой схеме присоединяются краевые условия второго порядка точности, аппроксимирующие условия $u = v = 0$ при $y = \pm 1$.

Функции $u = U_0(y)$, $v = 0$, $p = -2x\,\mathrm{Re}$ в точках сетки обращают разностные уравнения (2) и краевые условия в тождества. Это означает, что

---

* Аналогично могут быть рассмотрены течения жидкости между вращающимися цилиндрами, в круглой и коаксиальной трубе.

плоское течение Пуазейля доставляет точное решение также и разностных уравнений.

Линеаризуем разностные уравнения (2) на течении Пуазейля. Мы получим систему линейных уравнений для величин $\mathfrak{f}_{mn}{}^{l}$, причем коэффициенты этой системы зависят только от индекса n (от переменной y).

Спектральные свойства этой системы будем исследовать так же, как и линеаризованной задачи 1. Для этого ищем ее решения в виде

$$\mathfrak{f}_{mn}^{l} = \mathfrak{f}_n \exp \{i\alpha (hm - c\tau l)\}$$

и приходим к следующей линейной краевой задаче: определить зависимость $c = c(\alpha, \mathrm{Re}, h, g, \tau)$ с максимальной мнимой частью, при которой система линейных разностных уравнений

$$\mathfrak{f}_{n+1} - \mathfrak{f}_n = gB_n\mathfrak{f}_n \tag{3}$$

($B_n = B_n(\alpha, \mathrm{Re}, c, h, g, \tau)$ — некоторые квадратные матрицы) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее краевым условиям, поставленным для схемы (2) при $n = 0$ и $n = N = 2 / g$.

Эта задача по объему вычислений легко может быть решена на ЭВМ.

Система уравнений (3) является аналогом системы (1) (аналогом уравнения Орра — Зоммерфельда) для разностных схем. Мы будем называть эту систему характеристической системой схемы (2) на течении Пуазейля.

Определив зависимость $c = c(\alpha, \mathrm{Re}, h, g, \tau)$, выбираем параметры схемы (2) так, чтобы условие

$$|c(\alpha, \mathrm{Re}, h, g, \tau) - c(\alpha, \mathrm{Re})| < \varepsilon \tag{4}$$

было выполнено в области характерных значений α *. Условие (4) является условием удовлетворительной аппроксимации задачи 1 разностной схемой (2).

Если разностная схема аппроксимирует уравнения Навье — Стокса, то легко показать, что $B_n(\alpha, \mathrm{Re}, c, h, g, \tau) \to A(y) = A(y, \alpha, \mathrm{Re}, c)$ при $h, g, \tau \to 0$, следовательно, краевая задача для разностного уравнения (3) есть аппроксимация краевой задачи для системы (1). (В случае схемы (2) эта аппроксимация имеет второй порядок по h и g и первый по τ.) Учитывая, что $c = c(\alpha, \mathrm{Re}, h, g, \tau)$ аналитически зависит от параметров h, g, τ, приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ и любой конечной области D волновых чисел α найдутся столь малые шаги h, g, τ разностной схемы, что условие* (4) *будет выполнено для всех α из D.*

4. Пусть $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ и параметры схемы (2) таковы, что условие (4) выполнено в области нейтральной кривой при достаточно малом ε. Это значит, что и для спектра $c = c(\alpha, \mathrm{Re}, h, g, \tau)$ задачи (3) имеется область неустойчивости, т. е. значения α, для которых $\mathrm{Im}\, c(\alpha, \mathrm{Re}, h, g, \tau) > 0$.

В этом случае краевая задача для разностной системы уравнений (2) обладает свойством неустойчивости течения Пуазейля аналогично задаче 1. Нелинейная система уравнений (2) обладает стационарным (не зависящим от l) одномерным решением (течение Пуазейля), которое, однако, является неустойчивым относительно малых возмущений почти в той же области спектра, что и уравнения Навье — Стокса **. Следует ожидать,

* Для течения между пластинами при $\mathrm{Re} \sim 10^3$—10^4, т. е. в начальной стадии турбулентности, характерной областью значений α является интервал от 0 до 2. Величина ε должна быть столь малой, чтобы область неустойчивости течения Пуазейля существовала и для разностных уравнений. Так, при $\mathrm{Re} \sim 10^4$ имеем $\varepsilon < 0{,}004$.

** Обычно вычислитель стремится избегать разностных схем, линеаризация которых на решениях, близких к искомому, имеет возрастающие во времени решения так как он видит в этом «неустойчивость» самой схемы, а не физического явления. В данном случае положение обратное и, чтобы рассчитать неустойчивое явление, надо применять «неустойчивые» схемы.

что в этом случае поведение решений системы (2) может имитировать турбулентное течение жидкости. Итак, при значениях Re больше критического и при достаточно малом ε в неравенстве (4) нелинейные разностные уравнения (2) являются конечномерной моделью турбулентного движения жидкости.

5. Численное решение краевой задачи для характеристического уравнения (3) позволит точно определить зависимость $c = c(\alpha, \mathrm{Re}, h, g, \tau)$. Но можно и приближенно оценить значения параметров схемы, при которых (4) выполняется с некоторой разумной точностью. Для этого проведем разложение решений $\mathbf{f}_n$ системы (3) по малым параметрам g, h, τ. Мы получим систему

$$d\mathbf{f} / dy = [A(y) + A_1(y, h, g, \tau)]\mathbf{f}, \tag{5}$$

для которой ставятся те же граничные условия, что и для системы (1); здесь A_1 — некоторая матрица, линейная по τ и квадратично зависящая от g, h.

Потребуем, чтобы норма матрицы A_1 была порядка 0,01 от нормы матрицы A. Просчет этого требования приводит к ограничению на шаг g схемы (2) с учетом только членов порядка $\mathrm{Re}^{-1/2}$

$$g \sim 0{,}5 / \sqrt{\mathrm{Re}}, \tag{6}$$

а шаги h по переменному x и τ по времени остаются свободными в этом приближении.

6. Условие (6) требует, чтобы при $\mathrm{Re} \sim 10^4$ по переменному y (т. е. поперек основного течения) выбиралось порядка 200—4000 точек разностной сетки.

В начале срыва ламинарного течения по переменному x еще можно применять достаточно большой шаг $h \sim 10^{-1} - 10^{-2}$. Поэтому можно рассчитывать, что при существующих вычислительных средствах можно рассчитать начальную фазу срыва ламинарного течения, так как требуется сетка с числом точек порядка $10^4 - 10^5$. Однако в развитой стадии турбулентности по переменному x придется применять, по-видимому, столь же подробную сетку, как и по y. Это потребует сетки с числом точек по пространству порядка $10^5 - 10^6$ и малого шага τ по времени. Эти оценки показывают огромную трудоемкость процесса корректного численного решения уравнений Навье — Стокса в сильно закритической области.

Автор глубоко благодарен Б. Д. Моисеенко за помощь в проведении выкладок, а акад. А. Н. Тихонову и чл.-корр. АН СССР А. А. Самарскому за ценное обсуждение результатов.

Примечание при корректуре. В настоящее время автором и его сотрудниками проведено детальное изучение с помощью ЭВМ характеристической системы (3). Результаты этого изучения показывают возможность численного моделирования на современных ЭВМ явления потери устойчивости течения в канале.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
8 X 1972