

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КВАЗИПРОСТЫХ ОСОБЫХ ГРУПП ЛИ КЛАССОВ $E_7$ И $E_8$

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 XI 1972)

В 1956 г. нами <sup>(1)</sup> была высказана гипотеза о том, что компактные простые группы Ли классов  $E_7$  и  $E_8$  могут быть интерпретированы как группы движений эрмитовых эллиптических плоскостей  $\bar{S}_2(i, j, l, I, J)$  и  $\bar{S}_2(i, j, l, I, J, L)$  над алгебрами кватероктав и октооктав — тензорным произведением  $R(i, j, l, I, J)$  альтернативного тела октав  $R(i, j, l)$  и тела кватернионов  $R(i, j)$  и тензорным произведением  $R(i, j, l, I, J, L)$  двух тел  $R(i, j, l)$ . Эта гипотеза является естественным продолжением хорошо известных интерпретаций компактных простых групп Ли классов  $A_n, B_n, C_n, D_n, F_4$  и  $E_6$  в виде соответственно групп движений комплексного эрмитова эллиптического пространства  $\bar{S}_n(i)$ , вещественного эллиптического пространства  $S_{2n}$ , кватернионного эрмитова эллиптического пространства  $\bar{S}_{n-1}(i, j)$ , вещественного эллиптического пространства  $S_{2n-1}$ , октавной эрмитовой эллиптической плоскости  $\bar{S}_2(i, j, l)$  и эрмитовой эллиптической плоскости  $\bar{S}_2(i, j, l, I)$  над алгеброй биктав — тензорным произведением поля  $C = R(i)$  и тела  $R(i, j)$  <sup>(2)</sup>, стр. 151, 622, 683 и 684). Заметим также, что компактная группа  $G_2$  является группой автоморфизмов тела  $R(i, j, l)$ , а группы движений эрмитовых эллиптических пространств  $\bar{S}_n(i, I)$ ,  $\bar{S}_n(i, j, I)$  и  $\bar{S}_w(i, j, I, J)$  над алгебрами бикомплексных чисел, бикватернионов и кватеркватернионов — тензорным произведением  $R(i, I)$  двух полей  $R(i)$ , тензорным произведением  $R(i, j, I)$  поля  $R(i)$  и тела  $R(i, j)$  и тензорным произведением  $R(i, j, I, J)$  двух тел  $R(i, j)$  — изоморфны соответственно прямому произведению двух компактных групп  $A_n$  и компактных группам  $A_{2n+1}$  и  $D_{2n+2}$ , причем точки этих пространств изображаются соответственно парами точек двух пространств  $\bar{S}_n(i)$ , прямыми пространства  $\bar{S}_{2n+1}(i)$  и 3-плоскостями пространства  $S_{4n+3}$  <sup>(3-5)</sup>.

Э. Картан еще в 1927 г. <sup>(6)</sup>, стр. 945) показал, что компактные группы  $E_7$  и  $E_8$  являются группами движений симметрических римановых пространств  $V_{64}$  и  $V_{128}$ , стационарными группами движений которых являются соответственно прямое произведение компактных групп  $D_6$  и  $B_1$  и компактная группа  $D_8$ , однако до сих пор не удалось доказать, что эти симметрические пространства обладают кватероктавной и октооктавной структурами и совпадают с плоскостями  $\bar{S}_2(i, j, l, I, J)$  и  $\bar{S}_2(i, j, l, I, J, L)$  и не удалось корректно определить группы движений этих плоскостей.

В настоящей замене аналогичная задача решается для квазипростых групп Ли классов  $E_7$  и  $E_8$ . Как известно, всякому симметрическому риманову пространству с компактной простой группой движений соответствует некомпактная группа («двойственная по Картану») и получающаяся предельными переходами из обеих этих групп квазипростая группа («тройственная по Картану»), являющаяся группой движений симметрического риманова пространства нулевой кривизны той же размерности и с той же стационарной подгруппой, что и исходное симметрическое

пространство ((<sup>7</sup>), стр. 448, 467). Перечисленным эллиптическим и эрмитовым эллиптическим пространствам и плоскостям соответствуют квазипростые группы движений евклидовых пространств  $R_{2n}$  и  $R_{2n-1}$  и эрмитовых евклидовых пространств и плоскостей  $\bar{R}_n(i)$ ,  $\bar{R}_n(i, j)$ ,  $\bar{R}_2(i, j, l)$ ,  $\bar{\bar{R}}_n(i, I)$ ,  $\bar{\bar{R}}_n(i, j, I)$ ,  $\bar{\bar{R}}_n(i, j, I, J)$  и  $\bar{\bar{R}}_2(i, j, l, I)$  ((<sup>2</sup>), стр. 572, 680; (<sup>8</sup>)). Симметрическим пространствам  $V_{64}$  и  $V_{128}$ , определенным Картаном, также соответствуют квазипростые группы классов  $E_7$  и  $E_8$ , являющиеся группами движений симметрических римановых пространств нулевой кривизны, во всяком случае локально, изоморфных пространствам  $R_{64}$  и  $R_{128}$ , стационарными группами которых также являются соответственно прямое произведение компактных групп  $D_6$  и  $B_1$  и компактная группа  $D_8$ . Покажем, что эти пространства совпадают с плоскостями  $\bar{\bar{R}}_2(i, j, l, I, J)$  и  $\bar{\bar{R}}_2(i, j, l, I, J, L)$  и что группы движений этих плоскостей являются квазипростыми группами  $E_7$  и  $E_8$ .

Определим эрмитову евклидову плоскость  $\bar{\bar{R}}_2(i, \dots, I, \dots)$  над  $pq$ -мерным тензорным произведением  $R(i, \dots, I, \dots)$   $p$ -мерного тела  $R(i, \dots)$  и  $q$ -мерного тела  $R(I, \dots)$ ,  $p, q = 1, 2, 4, 8$ , как множество пар элементов  $x^1, x^2$  этих алгебр, которые мы будем рассматривать также как векторы  $x = \{x^1, x^2\}$ . В этих плоскостях вводится скалярное произведение  $(x, y) = \bar{x}^1 y^1 + \bar{x}^2 y^2$ . Вещественная часть  $\text{Re}(x, x)$  скалярного квадрата  $(x, x)$  равна сумме  $2pq$  квадратов вещественных координат элементов  $x^1$  и  $x^2$ , поэтому, если считать за расстояние между точками  $(x^1, x^2)$  и  $(y^1, y^2)$  неотрицательный квадратный корень из выражения  $\text{Re}(y - x, y - x)$ , то мы введем в плоскость  $\bar{\bar{R}}_2(i, \dots, I, \dots)$  метрику евклидова пространства  $R_{2pq}$ .

Прямые плоскости  $\bar{\bar{R}}_2(i, \dots, I, \dots)$  определяются уравнениями  $x^2 = ax^1 + b$ ,  $x^1 = a$ . В метрике пространства  $R_{2pq}$  эти прямые изометричны пространствам  $R_{pq}$ . Будем называть движениями плоскости  $\bar{\bar{R}}_2(i, \dots, I, \dots)$  движения пространства  $R_{2pq}$ , переводящие систему  $pq$ -плоскостей, изображающих прямые плоскости  $\bar{\bar{R}}_2(i, \dots, I, \dots)$  в себя. Переносы пространства  $R_{2pq}$  являются такими движениями и изображаются в плоскости  $\bar{\bar{R}}_2(i, \dots, I, \dots)$  переносами  $'x^i = x^i + a^i$ . Вращения пространства  $R_{2pq}$  около начала переводят систему  $pq$ -плоскостей в себя только в том случае, когда  $2pq$ -матрицы этих вращений состоят из четырех  $pq$ -матриц линейных преобразований  $'x = ax$  в алгебре (в случае ассоциативных алгебр эти  $pq$ -матрицы — матрицы регулярного представления алгебры).

$2pq$ -матрицы такого вида являются матрицами линейных преобразований, определяемыми произведениями преобразований  $'x^i = A_j^i x^j$  и  $'x^i = \varphi(x^i)$ , где  $\varphi(x)$  — непрерывный автоморфизм алгебры. Найдем структуру алгебры Ли группы вращений плоскости  $\bar{\bar{R}}_2(i, \dots, I, \dots)$ . Так как алгебра Ли группы вращений пространства  $R_{2pq}$  состоит из кососимметрических  $2pq$ -матриц, то указанная алгебра Ли состоит из кососимметрических  $2pq$ -матриц, состоящих из четырех  $pq$ -матриц линейных преобразований  $'x^i = A_j^i x^j$  в алгебре и элементов алгебры Ли группы автоморфизмов алгебры. Так как  $pq$ -матрицы линейных преобразований  $'x = ax$  в алгебре при  $a = i, \dots, I, \dots$  также кососимметричны, транспонирование этих  $pq$ -матриц соответствует умножению элементов  $i, \dots, I, \dots$  на  $-1$ , т. е. переходу от элемента  $a$  к элементу  $\bar{a}$ . Поэтому, для того чтобы  $2pq$ -матрица линейного преобразования, определяемого преобразованием  $'x^i = A_j^i x^j$ , была кососимметричной, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $(A_j^i)$  обладала свойством  $A_j^i = -\bar{A}_i^j$ . На элемент  $A_2^1$  матрицы  $(A_j^i)$  не наложено никаких условий и множество этих элементов  $pq$ -мерно. Элементы  $A_1^1$  и  $A_2^2$  — линейные комбинации базисных элементов  $i, \dots, I, \dots$  и не содер-



жат вещественной части и произведений  $iI, \dots$  и размерность каждого из множеств этих элементов равна  $p + q - 2$ .

Группы непрерывных автоморфизмов полей  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}(i)$  дискретны, а группы автоморфизмов тел  $\mathbf{R}(i, j)$  и  $\mathbf{R}(i, j, l)$  изоморфны соответственно 3-мерной группе движений плоскости  $S_2$  и 14-мерной компактной группе  $G_2$ , т. е., если мы обозначим размерность группы автоморфизмов  $p$ -мерной алгебры  $\mathbf{R}(i, \dots)$  через  $a(p)$ , то  $a(1) = a(2) = 0$ ,  $a(4) = 3$ ,  $a(8) = 14$ , а алгебра Ли группы автоморфизмов тензорного произведения  $\mathbf{R}(i, \dots, I, \dots)$  является прямой суммой алгебр Ли тензорных сомножителей  $\mathbf{R}(i, \dots)$  и  $\mathbf{R}(I, \dots)$  и ее размерность равна  $a(p) + a(q)$ . Поэтому размерность группы вращений плоскости  $\bar{R}_2(i, \dots, I, \dots)$  равна  $pq + 2(p + q - 2) + a(p) + a(q)$ . Так как размерность группы переносов плоскости  $\bar{R}_2(i, \dots, I, \dots)$  равна размерности пространства  $R_{2pq}$ , т. е.  $2pq$ , размерность всей группы движений плоскости  $\bar{R}_2(i, \dots, I, \dots)$  равна  $3pq + 2(p + q - 2) + a(p) + a(q)$ .

С другой стороны, прямые, выходящие из точки  $(0, 0)$  плоскости  $\bar{R}_2(i, \dots, I, \dots)$ , находятся во взаимно однозначном соответствии с точками эрмитовой эллиптической прямой  $\bar{S}_1(i, \dots, I, \dots)$  над той же алгеброй и при вращениях плоскости производят движения этой прямой.

Можно показать, что пары полярно сопряженных точек прямых  $\bar{S}_1(i, \dots, I, \dots)$ , т. е. точек этих прямых, соответствующих векторам  $x$  и  $y$  плоскости  $\bar{R}_2(i, \dots, I, \dots)$ , для которых  $(x, y) = 0$ , изображаются парами взаимно полярных  $(p - 1)$ -плоскостей и  $(q - 1)$ -плоскостей вещественного эллиптического пространства  $S_{p+q-1}$ , причем группа движений прямой  $\bar{S}_1(i, \dots, I, \dots)$  изоморфна группе движений пространства  $S_{p+q-1}$ , а метрические инварианты двух точек прямой  $\bar{S}_1(i, \dots, I, \dots)$  равны метрическим инвариантам двух соответствующих им  $(p - 1)$ -плоскостей или их

Таблица 1

|                               |                                                                           |           |                  |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|------------------|
| $R_2$                         | $S_1$                                                                     | $R_2$     | $B_1$            |
| $\bar{R}_2(i)$                | $\bar{S}_1(i) \times S_1 = S_2 \times S_1$                                | $R_4$     | $A_2$            |
| $\bar{R}_2(i, j)$             | $\bar{S}_1(i, j) \times S_2 = S_4 \times S_2$                             | $R_8$     | $C_3$            |
| $\bar{R}_2(i, j, l)$          | $\bar{S}_1(i, j, l) = S_8$                                                | $R_{16}$  | $F_4$            |
| $\bar{R}_2(i, I)$             | $\bar{S}_1(i, I) \times S_1 \times S_1 = S_3 \times S_1 \times S_1$       | $R_8$     | $A_2 \times A_2$ |
| $\bar{R}_2(i, j, I)$          | $\bar{S}_1(i, j, I) \times S_2 \times S_1 = S_5 \times S_2 \times S_1$    | $R_{16}$  | $A_5$            |
| $\bar{R}_2(i, j, l, I)$       | $\bar{S}_1(i, j, l, I) \times S_1 = S_9 \times S_1$                       | $R_{32}$  | $E_6$            |
| $\bar{R}_2(i, j, I, J)$       | $\bar{S}_1(i, j, I, J) \times S_2 \times S_2 = S_7 \times S_2 \times S_2$ | $R_{32}$  | $D_6$            |
| $\bar{R}_2(i, j, l, I, J)$    | $\bar{S}_1(i, j, l, I, J) \times S_2 = S_{11} \times S_2$                 | $R_{64}$  | $E_7$            |
| $\bar{R}_2(i, j, l, I, J, L)$ | $\bar{S}_1(i, j, l, I, J, L) = S_{15}$                                    | $R_{128}$ | $E_8$            |

поляр. С другой стороны, можно показать, что группа вращений плоскости  $\bar{R}_2(i, \dots, I, \dots)$  изоморфна прямому произведению группы движений прямой  $\bar{S}_1(i, \dots, I, \dots)$  и группы элементов единичного модуля тензорных сомножителей алгебры.

Размерность группы движений пространства  $S_{p+q-1}$  равна  $1/2(p + q - 1)(p + q)$ . Группа элементов единичного модуля поля  $\mathbf{R}$  дискретна, группа элементов единичного модуля поля  $\mathbf{R}(i)$  изоморфна 1-мерной группе движений прямой  $S_1$ , группа элементов единичного модуля тела  $\mathbf{R}(i, j)$  локально изоморфна 3-мерной группе движений плоскости  $S_2$ , а октавы единичного модуля, в силу неассоциативности их умножения, не образуют группы, т. е. если мы обозначим размерность группы элементов единичного модуля  $p$ -мерной алгебры  $\mathbf{R}(i, \dots)$  через  $e(p)$ , то  $e(1) = 0$ ,

| $p$ | $q$ | $pq$ | $2(p+q-2)$ | $a(p)+a(q)$ | $1/2(p+q-1)(p+q)$ | $e(p)+e(q)$ | $r$ | $t$ | $s$ |
|-----|-----|------|------------|-------------|-------------------|-------------|-----|-----|-----|
| 1   | 1   | 1    | 2·0        | 0           | 1                 | 0           | 1   | 2   | 3   |
| 2   | 1   | 2    | 2·1        | 0           | 3                 | 1           | 4   | 4   | 8   |
| 4   | 1   | 4    | 2·3        | 3           | 10                | 3           | 13  | 8   | 21  |
| 8   | 1   | 8    | 2·7        | 14          | 36                | 0           | 36  | 16  | 52  |
| 2   | 2   | 4    | 2·2        | 0           | 6                 | 1+1         | 8   | 8   | 16  |
| 4   | 2   | 8    | 2·4        | 3           | 15                | 3+1         | 19  | 16  | 35  |
| 8   | 2   | 16   | 2·8        | 14          | 45                | 1           | 46  | 32  | 78  |
| 4   | 4   | 16   | 2·6        | 3+3         | 28                | 3+3         | 34  | 32  | 66  |
| 8   | 4   | 32   | 2·10       | 14+3        | 66                | 3           | 69  | 64  | 133 |
| 8   | 8   | 64   | 2·14       | 14+14       | 120               | 0           | 120 | 128 | 248 |

$e(2) = 1, e(4) = 3, e(8) = 0$ . Поэтому размерность группы вращений плоскости  $\bar{R}_2(i, \dots, I, \dots)$  можно представить также в виде  $1/2(p+q-1) \times \times (p+q) + e(p) + e(q)$ .

Заметим, что стационарные подгруппы симметрических пространств  $V_{64}$  и  $V_{128}$  Картана, группами движений которых являются компактные группы  $E_7$  и  $E_8$ , изоморфны соответственно прямому произведению групп движений пространства  $S_{11}$  и плоскости  $S_2$  и группе движений пространства  $S_{15}$ .

В табл. 1 указаны плоскости  $\bar{R}_2(i, \dots, I, \dots)$ , их группы вращений (группы указываются обозначениями пространств, группы движений которых изоморфны этим группам), пространства  $R_{2pq}$  и классы квазипростых групп Ли, к которым принадлежат группы движений. В табл. 2 указаны соответствующие этим плоскостям числа  $p, q, pq, 2(p+q-2), a(p) + a(q), 1/2(p+q-1)(p+q), e(p) + e(q)$  размерности  $r$  групп вращений (равные  $pq + 2(p+q-2) + a(p) + a(q) = 1/2(p+q-1)(p+q) + e(p) + e(q)$ ), размерности  $t$  групп переносов (равные  $2pq$ ) и размерности  $s$  полных групп движений этих плоскостей (равные суммам размерностей двух предыдущих групп).

Институт истории естествознания и техники  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
28 IX 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Б. А. Розенфельд, ДАН, 106, № 4 (1956). <sup>2</sup> Б. А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии, М., 1955. <sup>3</sup> Н. Т. Аббасов, Уч. зап. Азерб. унив., сер. физ.-матем. наук, № 2 (1962). <sup>4</sup> Н. Т. Аббасов, там же, № 2 (1963). <sup>5</sup> Л. В. Румянцев, там же, № 3 (1963). <sup>6</sup> E. Cartan, Oeuvres complètes, Part I, 2, Paris, 1952. <sup>7</sup> Б. А. Розенфельд, Неевклидовы пространства, М., 1969. <sup>8</sup> Б. А. Розенфельд, Л. М. Карпова, Тр. семин. по вект. и тенз. анализу при МГУ, 13 (1966).