Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 517.514.5 *МАТЕМАТИКА*

А. И. ВАЙНДИНЕР

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛИНОМЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ, И ЭФФЕКТИВНЫЕ ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 29 IX 1972)

1. Для обобщенных полиномов ([1], [2]) (см. также ([3])) с заданными старшими «коэффициентами», не равными одновременно тождественному нулю, формулируются теоремы, обобщающие известные теоремы Чебышева. Кроме определенного теоретического интереса, задача о полиноме наименее уклоняющемся от нуля, имеет приложения во многих задачах анализа, в частности при построении эффективных прямых методов решения краевых задач.

1.1. В квадрате $\overline{\Omega} = \{-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1\}$ рассмотрим функцию $f(x, y) \in C(\overline{\Omega})$ и обобщенный алгебраический полином

$$F_{\overline{K}_2}^{(1)} = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m(y)\, x^{m-1} + \sum_{n=1}^{N} \psi_n(x)\, y^{n-1}. \tag{1}$$

Если $F_{\overline{K}_2}^{(1)}$ — полином наилучшего равномерного приближения (н.р.п.) для функции f, то пишем $E_f F_{\overline{K}_2}^{(1)}$. Обозначим $R_{\overline{K}_2}(f; x, y) = f(x, y) - E_f F_{\overline{K}_2}^{(1)}$.

Т е о р е м а 1.1. *Полином* (1) *н.р.п. для функции* $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ *единствен и вполне характеризуется тем, что для любого фиксированного значения* $y_0 \subset [-1, 1]$ *равенство* $R_{\overline{K}_2}(f; x, y_0) = \pm \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |R_{\overline{K}_2}(f; x, y_0)|$ *выполняется с чередующимися знаками по крайней мере в* $M+1$ *различных точках* $x \subset [-1, 1]$, *а для любого фиксированного значения* $x_0 \subset [-1, 1]$ *равенство* $R_{\overline{K}_2}(f; x_0, y) = \pm \max\limits_{-1\leqslant y\leqslant 1} |R_{\overline{K}_2}(f; x_0, y)|$ *выполняется с чередующимися знаками по крайней мере в* $N+1$ *различных точках* $y \subset [-1, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (с некоторыми несущественными отличиями, вызванными двумерным случаем) почти дословно повторяет доказательство теоремы Чебышева (см. ([5]), стр. 66).

Т е о р е м а 1.2. *Если* $F_{\overline{K}_2}^{(1)}$ — *полином н.р.п. для функции* $f = f_1(x) \cdot f_2(y)$, *то он может быть представлен в виде*

$$E_f F_{\overline{K}_2}^{(1)} = f_1(x) \sum_{n=1}^{N} a_n^{(N)}(f_2)\, y^{n-1} + f_2(y) \sum_{m=1}^{M} a_m^{(M)}(f_1)\, x^{m-1} - \\ - \sum_{m=1}^{M} a_m^{(M)}(f_1)\, x^{m-1} \sum_{n=1}^{M} a_n^{(N)}(f_2)\, y^{n-1}, \tag{2}$$

где $a_m^{(M)}(f_1)$ *и* $a_n^{(N)}(f_2)$ — *коэффициенты полиномов н.р.п. соответственно для функций* f_1 *и* f_2 *на интервале* $[-1, 1]$.

В том, что для $E_f F_{\overline{K}_2}^{(1)}$ выполняется характеристическое свойство полинома н.р.п., согласно теореме 1.1, убеждаемся, заметив, что

$$E_f F_{\overline{K}_2}^{(1)} = f - R_M(f_1; x)\, R_N(f_2; y), \tag{3}$$

где обозначено $R_M(f_1; x) = f_1 - \sum\limits_{m=1}^{M} a_m^{(M)}(f_1)\, x^{m-1}$.

С л е д с т в и е т е о р е м ы 1.2. *Обобщенный полином порядка $\overline{K}_2$ ранга 1 н.р.п. для функции $f = f_1(x) f_2(y) \in C(\overline{\Omega})$ интерполирует f на решете $\Gamma^{(1)}_{\overline{K}}$ (см. ([1], [2])) порядка $\overline{K}_2^* = \{M^*, N^*\}$ ранга 1, причем $M^* \geqslant M$, $N^* \geqslant N$.*

1.2. Переходя к построению обобщенных полиномов, наименее уклоняющихся от нуля (н.у.н.), рассмотрим полином

$$G^{(1)}_{\overline{N}_2} = \sum_{m=1}^{M} \varphi_m(y) x^{m-1} + \sum_{n=1}^{N+1} \psi_n(x) y^{n-1}, \tag{4}$$

старший «коэффициент» которого $\psi_{N+1}(x) \neq 0$ — заданная непрерывная на $[-1, 1]$ функция.

Т е о р е м а 1.3. *Полином вида* (4), *н.у.н. в $\overline{\Omega}$, есть*

$$E_0 G^{(1)}_{\overline{N}_2} = R_M(\psi_{N+1}; x) T_N(y), \tag{5}$$

где $T_N(y) \equiv 2^{1-N} t_N(y) = 2^{1-N} \cos N \arccos y$ — полином Чебышева.

Действительно, на основании теоремы 1.2 и свойств полинома Чебышева получаем, что функция $E_0 G^{(1)}_{\overline{N}_2} - \psi_{N+1} y^N$ есть обобщенный полином (порядка $\overline{K}_2 = \{M, N\}$ ранга 1) н.р.п. функции $-\psi_{N+1}(x) y^N$. Поэтому полином $E_0 G^{(1)}_{\overline{N}_2}$ единствен и есть полином вида (4), н.у.н. в $\overline{\Omega}$.

З а м е ч а н и е 1. Если $\psi_{N+1}(x)$ — периодическая периода 2 функция, то, очевидно, вместо полинома (4), н.у.н. в $\overline{\Omega}$, нужно рассматривать полином

$$\Pi^{(1)}_{\overline{N}_2} = \varphi_1(y) +$$
$$+ \sum_{m=2}^{M} \varphi_m(y) \cos(m-1)\pi x + \tilde{\varphi}_m(y) \sin(m-1)\pi x + \sum_{n=1}^{N+1} \psi_n(x) y^{n-1}, \tag{6}$$

для которого справедлива теорема 1.3, если в равенстве (5) в качестве R_M взять разность между $\psi_{N+1}(x)$ и ее н.р.п. тригонометрическим полиномом порядка $M-1$.

С л е д с т в и е т е о р е м ы 1.3. *Обобщенный полином вида* (4) (*или* (6)), *н.у.н. в $\overline{\Omega}$, обращается в нуль на решете $\Gamma^{(1)}_{\overline{N}_2^*}$ порядка $N_2^* = \{M^*, N\}$, где $M^* \geqslant M$, ранга 1, определяемом нулями полинома Чебышева порядка N и нулями функции $R_M(\psi_{N+1}; x)$.*

Таким образом, полипом (5), н.у.н. в $\overline{\Omega}$, можно интерпретировать (как и в одномерном случае) как полином с ненулевым старшим коэффициентом, интерполирующий тождественный нуль на некотором решете максимального ранга (т.е. ранга 1 для области размерности 2). Одно из семейств линий этого решета определяется нулями $Z_n^{(N)}$ полинома $t_N(y)$; так как второе семейство линий этого решета, вообще говоря, неизвестно, то, определяя это семейство также нулями $Z_m^{(M)}$ полинома Чебышева $t_M(x)$, получим, что для определенного таким образом решета $\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\overline{K}_2}$ полином вида (4), интерполирующий на $\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\overline{K}_2}$ тождественный нуль, имеет порядок уклонения от нуля, близкий к наилучшему.

Т е о р е м а 1.4. *Полином $\tilde{G}^{(1)}_{\overline{N}_2}$ вида* (4), *интерполирующий тождественный нуль на решете $\tilde{\Gamma}^{(1)}_{\overline{K}_2}$, единствен и равен*

$$\tilde{G}_{\overline{N}_2} = T_N(y) r_M(\psi_{N+1}; x, z_k^{(M)}), \tag{7}$$

где r_M — разность между функцией $\psi_{N+1}(x)$ и ее интерполяционным полиномом порядка $M-1$ по узлам — $x_k = z_k^{(M)}$. При этом

$$|\tilde{G}_{\overline{N}_2}| \leqslant 2^{1-N} \left(9 + \frac{4}{\pi} \ln(M-1)\right) |t_M(x) t_N(y)| \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |R_M(\psi_{N+1}; x)|. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 4 может быть получено как следствие ([1,2]); впрочем, ввиду разделения переменных в интерполируемой функции, оно непосредственно следует из рассмотрения правой части (7). Неравенство (8) есть следствие теоремы Бернштейна относительно $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |r_M(\psi_{N+1}; x; z_k^{(M)})|$.

1.3. Здесь мы рассмотрим обобщенный полином

$$H_{L_2}^{(1)} = \sum_{m=1}^{M+1} \varphi_m(y)\, x^{m-1} + \sum_{n=1}^{N+1} \psi_n(x)\, y^{n-1}, \tag{9}$$

оба старших «коэффициента» которого $\varphi_{M+1}(y) \neq 0$, $\psi_{N+1}(x) \neq 0$ суть заданные непрерывные на $[-1, 1]$ функции. Точное решение задачи о построении полинома (9), н.у.н. в $\overline{\Omega}$, требует отдельного рассмотрения, однако если «коэффициенты» φ_m и ψ_n, $m = 1, 2, \ldots, M$, $n = 1, 2, \ldots, N$, полинома (9) определять из условия интерполирования тождественного нуля на решете $\widetilde{\Gamma}_{\overline{K}_2}^{(1)}$, то такой полином $\widetilde{H}_{L_2}^{(1)}$ может быть указан точно:

$$\widetilde{H}_{L_2}^{(1)} = T_N(y)\, r_M(\psi_{N+1}; x, z_m^{(M)}) + T_M(x)\, r_N(\varphi_{N+1}; y, z_n^{(N)}). \tag{10}$$

Равенство (10) есть следствие теоремы 1.4 и линейности оператора интерполирования.

2. Под прямыми мы понимаем здесь приближенные методы решения задач математической физики в n-мерной области, сводящие эти задачи к решению задач математической физики в k-мерной области ($0 \leqslant k < n$). Это определение несколько шире определения ([6]) и включает известные прямые методы Л. В. Канторовича, их обобщения ([4]), метод прямых, метод интегральных соотношений и др. Во второй части заметки мы показываем, что использование обобщенных полиномов, н.у.н. или близких к ним, позволяет строить прямые методы, эффективные с точки зрения потребного счета.

2.1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta U = f; \quad U(x, \pm 1) = g^{\pm}(x), \quad U(\pm 1, y) = h^{\pm}(y), \tag{11}$$

где $g^{\pm}(x)$, $h^{\pm}(y)$ и $f(x, y)$ — функции гёльдеровских классов $C^{(p)}H^{(\alpha)}[-1, 1]$ и $C^{(p,\,p)}H^{(\alpha)}(\overline{\Omega})$ *. Пусть для функций $g^{\pm}$, $h^{\pm}$, f выполнены естественные условия согласования в угловых точках ([7]), и решение задачи (11) $U \in C^{(p+2,\,p)}H^{(\alpha)} \cup C^{(p,\,p+2)}H^{(\alpha)}$. Приближенное решение $\widetilde{U}$ задачи (11) примем в форме

$$\widetilde{U} = (1 - x^2) \sum_{m=1}^{M} \varphi_m(y)\, x^{m-1} + (1 - y^2) \sum_{n=1}^{N} \psi_n(x)\, y^{n-1} + \Phi(x, y),$$

$$\varphi_m(\pm 1) = \psi_n(\pm 1) = 0, \tag{12}$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1+y}{2} g^{+}(x) + \frac{1-y}{2} g^{-}(y) + \frac{1+x}{2} h^{+}(y) + \frac{1-x}{2} h^{-}(y) + {}$$

$$+ a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy,$$

а функции $\varphi_m(y)$, $\psi_n(x)$ определяем по методу решеточной коллокации ([2,4]) на решете, состоящем из линий $x = z_k^{(M)}$ и линий $y = z_k^{N}$, т. е. из системы уравнений

$$(\Delta \widetilde{U} - f)|_{\widetilde{\Gamma}_{\overline{K}_2}^{(1)}} = 0. \tag{13}$$

---

* Если $s(x) \in C^{(p)}H^{(\alpha)}[-1,1]$, $f(x, y) \in C^{(p,\,q)}H^{(\alpha)}(\overline{\Omega})$, то

$$g[s] \equiv \sup_{x_1,\,x_2} \frac{|S(x_2) - S(x_1)|}{|x_2 - x_1|^{\alpha}} \leqslant k_1 < \infty,$$

$$G[f] \equiv \sup_{x_1,\,x_2,\,y_1,\,y_2} \frac{|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_2, y_2)|}{|x_2 - x_1|^{\alpha}\, |y_2 - y_1|^{\alpha}} \leqslant k_2 < \infty,$$

где k_1, k_2 не зависят от s, f; $S = d^p s / dx^p$, $F = \partial^{p+q} f / \partial x^p \partial y^q$.

Постоянные a_i в (12) находятся обычным образом из согласования краевого условия в угловых точках.

Теорема 2.1. *Решение* $\bar{U}$ *системы* (13) *существует и единственно в классе* $C^{(p+2,\,p)}H^{(\beta)} \cup C^{(p,\,p+2)}H^{(\beta)}$, $0<\beta<\alpha$, *а для невязки справедлива оценка*

$$|\Delta\bar{U}-f| \leqslant c\,|t_M(x)\,t_N(y)|\left(\frac{g[\varphi_M'']\ln N}{2^{1-M}N^{p+\beta}}+\frac{g[\psi_N'']\ln M}{2^{1-N}M^{p+\beta}}+\frac{cG[f]\ln M\ln N}{(MN)^{p+\beta}}\right) \equiv \equiv o(\omega_{M,N}), \tag{14}$$

где $\omega_{M,N}=(MN)^{-(p+\beta')}$, $\beta'<\beta$, c — *постоянная, не зависящая от* M *и* N.

Первая часть утверждения теоремы 2.1 может быть получена на основе общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича; оценка (14) следует из соотношений (8), (10) и оценки погрешности интерполирования функций класса $C^{(p,\,p)}H^{(\beta)}(\bar{\Omega})$ обобщенными полиномами порядка $\bar{K}_2 = \{M, N\}$ ранга 1 (см. [2], п.1.4).

Замечание 2. Если задача (11) решается методом коллокации по линиям $x=z_k^{(\Lambda)}$, то для получения невязки $o(\omega_{M,N})$ необходимо брать число линий коллокации $\Lambda=O(MN)$, т. е. реализация метода решеточной коллокации требует существенно меньшего числа действий (по крайней мере в $\Lambda/(M+N)$ раз), так как в обоих случаях численная реализация сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка Λ и $M+N$ соответственно. Аналогичная ситуация возникает при сравнении метода решеточной коллокации с методами прямых, интегральных соотношений и др.

Сравним число действий метода коллокации на сетке с узлами x_k, y_l, где $x_k=z_k^{(\Lambda)}$, $y_l=z_l^{(\Lambda)}$, примененного к исходной задаче (11) и к системе (13). Если возникающие при этом алгебраические системы (порядка Λ^2 и $\Lambda(M+N)$ соответственно) решать методом Гаусса, то, очевидно, реализация второй системы требует в $\Lambda^3/(M+N)^3$ меньшего числа действий (порядок аппроксимации задачи (11) в обоих случаях равен $o(\omega_{M,N})$).

2.2. Рассмотрим задачу Гурса в квадрате $\bar{\Omega}$:

$$LU \equiv \sum_{i=0}^{1}\sum_{i=0}^{1} c_{i,j}\frac{\partial^{i+j}U}{\partial x^i\,\partial y^j}=f_1(x)f_2(y); \quad U(-1,y)=U(x,-1)=0, \tag{15}$$

где $c_{i,j}=\text{const}$, $c_{1,1}=1$; $f_1, f_2 \in C^{(p)}H^{(\alpha)}[-1, 1]$. Приближенное решение задачи (15) примем в форме

$$\bar{U}=(1+x)\sum_{m=1}^{M}\varphi_m(y)\,x^{m-1}+(1+y)\sum_{n=1}^{N}\psi_n(x)\,y^{n-1}, \tag{16}$$

где $\varphi_m(-1)=\psi_n(-1)=0$; функции φ_m и ψ_n определяем из системы обыкновенных дифференциально-операторных уравнений

$$(L\bar{U}-f_1f_2)|_{\bar{\Gamma}^{(1)}_{K_2}}=0. \tag{17}$$

Теорема 2.2. *Решение* $\bar{U}$ *системы* (17) *существует и единственно в классе* $\bar{U}\in C^{(p+1,\,p+1)}H^{(\alpha)}$, *а для невязки справедлива оценка*

$$|L\bar{U}-f_1f_2| \leqslant |t_M(x)\,t_N(y)|\,O\left(\frac{\ln M\ln N}{(MN)^{p+\alpha}}\right). \tag{18}$$

Оценка (18) и эффективность метода решеточной коллокации доказываются здесь так же, как и в случае уравнения Пуассона.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Вайндинер, ДАН, 192, № 3 (1970). [2] А. И. Вайндинер, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., № 4 (1973). [3] Ю. А. Брудный, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 3 (1970). [4] А. И. Вайндинер, Вест. Московск. унив., сер. матем., механ., № 3 (1972). [5] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., 1965. [6] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М., 1947. [7] Е. А. Волков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 77 (1965).