Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 517.948.32 МАТЕМАТИКА

Академик АН БССР Ф. Д. ГАХОВ

О НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ДОПУСТИМЫМИ НУЛЯМИ НА КОНТУРЕ

Пусть контур L, состоящий из $m+1$ простых взаимно не пересекающихся замкнутых гладких кривых $L_0, L_1, \ldots, L_m$, из которых L_0 содержит внутри себя остальные, делит плоскость на $m+1$ связную область D^+ и ее дополнение D^-, состоящее из $m+1$ областей $D_0^-, D_1^-, \ldots, D_m^-$; D_0^- содержит бесконечно удаленную точку. Принимаем для определенности, что начало координат лежит в D^+.

Определить две функции $\Phi^\pm(z)$, аналитические соответственно в $D^\pm$, предельные значения которых на контуре удовлетворяют следующему нелинейному однородному краевому условию:

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta, \tag{1}$$

где α, β — целые положительные числа, $G(t) \neq 0$ — заданная функция. Чтобы не осложнять рассуждения не относящимися к делу трудностями, будем считать контур гладким и $G(t)$ удовлетворяющей условию Гёльдера. Решение ищется в классе функций, непрерывных вплоть до контура.

Краевая задача (1) рассматривалась в работах автора ([1], [2]) в предположении, что решение не может иметь нулей на контуре. Настоящая заметка является обобщением работы ([1]) на многосвязную область и работ ([1], [2]), на случай допустимых нулей на контуре. Попутно исправляется допущенная в ([1]) неточность*. Указания на имеющие отношение к рассматриваемой проблеме предшествующие работы содержатся в ([1], [2]).

Пусть $\varkappa_k$, $k=0, 1, \ldots, m$,— индексы коэффициента $G(t)$ по кривым L_k, обходимым в положительном направлении относительно области D^+ (против часовой стрелки для L_0 и по часовой для внутренних контуров) и

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m \tag{2}$$

— индекс задачи по всему контуру L.

Принимая временно в качестве искомых функций $[\Phi^+(z)]^\alpha$, $[\Phi^-(z)]^\beta$ и используя теорию решения линейной краевой задачи Римана ([3]), получим, что при $\varkappa < 0$ не существует решений, отличных от тривиального нулевого, а при $\varkappa \geqslant 0$ решение необходимо представляется в виде

$$\Phi^+(z) = e^{\frac{1}{\alpha}\Gamma^+(z)}\Big[\prod_{k=1}^m (z-z_k)^{-\varkappa_k} P_\varkappa(z)\Big]^{1/\alpha}, \quad \Phi^-(z) = e^{\frac{1}{\beta}\Gamma^-(z)}[z^{-\varkappa} P_\varkappa(z)]^{1/\beta}, \tag{3}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\Big[\tau^{-\varkappa}\prod\limits_{k=1}^m (\tau - z_k)^{-\varkappa_k} G(\tau)\Big]}{\tau - z}\, d\tau,$$

z_k — произвольно взятые точки из D_k^-, $P_\varkappa(z)$ — многочлен степени $\varkappa$.

В линейной задаче многочлен остается произвольным и определяет множество линейно-независимых решений задачи. Нули $P_\varkappa(z)$ являются

* В заключительном замечании к работе ([1]) указывалось, что результаты переносятся без изменения и на случай, когда допускаются нули на контуре. Однако, как показывается здесь, контурные нули вносят изменения.

одновременно нулями (целого порядка) решения $[\Phi^+(z)]^\alpha$, $[\Phi^-(z)]^\beta$ линейной задачи. При этом они безразлично могут лежать в областях $D^\pm$ или же на контуре L. Они являются также и нулями решений нелинейной задачи $\Phi^\pm(z)$, но уже, возможно, не целого порядка. Нули $P_\varkappa(z)$ могут порождать у решения новые особенности, невозможные в линейной задаче — точки ветвления. Распределение нулей $P_\varkappa(z)$ между областями D^+, D_k^- и отдельными кривыми контура L так, чтобы отсутствовали точки ветвления, а также чтобы решение оставалось однозначным, является в рассматриваемой задаче решающим.

Обозначим $N_\pm$, N_L числа нулей решения рассматриваемой нелинейной задачи (1) соответственно в $D^\pm$ и на контуре. Нули решения в $D^\pm$ в силу требования аналитичности необходимо должны быть числами целыми. Для нулей же контурных допустим и не целый порядок; они не будут точками ветвления решения. На основании этих соображений многочлен $P_\varkappa$ необходимо должен иметь вид

$$P_\varkappa(z) = [P_{N_+}(z)]^\alpha [P_{N_-}(z)]^\beta P_L(z), \tag{4}$$

где P_{N_+} и P_L — многочлены с нулями соответственно в $D^\pm$ и на контуре. Приравнивая в последнем равенстве показатели степеней, получим, что необходимо должно выполняться равенство

$$\alpha N_+ + \beta N^- + N_L = \varkappa. \tag{5}$$

Оно представляет собою неопределенное уравнение в целых неотрицательных числах относительно $N_\pm$, N_L. Отсюда вытекает

Теорема 1. *Для того чтобы нелинейная однородная краевая задача* (1) *имела отличные от тождественного нуля аналитические* (*не обязательно однозначные*) * *решения, необходимо и достаточно, чтобы неопределенное уравнение* (5) *относительно* $N_\pm$, N_L *имело решение в целых неотрицательных числах.*

Так как левая часть равенства (5) неотрицательна, то справедлива

Теорема 2. *Для существования нетривиального решения задачи* (1) *необходимо, чтобы индекс задачи* $\varkappa$ *был неотрицательным.*

Допустим, что это необходимое условие выполнено и $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) \geqslant 0$. Тогда уравнение (5) при любом $\varkappa \geqslant 0$ имеет по крайней мере одно очевидное решение $(0, 0, \varkappa)$. Отсюда следует

Теорема 3. *При* $\varkappa \geqslant 0$ *задача* (1) *имеет по крайней мере одно аналитическое* (*не обязательно однозначное*) *решение.*

Исследование вопроса о числе решений рассматриваемой задачи в классе аналитических неоднозначных функций сводится к подсчету числа решений неопределенного уравнения (5) в целых неотрицательных числах. Это число не может быть выражено какой-либо простой формулой; можно лишь описать алгоритм его получения.

Будем в уравнении (5) вместо N_L последовательно подставлять все допустимые целые неотрицательные числа от $\varkappa$ до нуля. Обозначив $\varkappa - N_L = c$, рассмотрим множество неопределенных уравнений

$$\alpha N_+ + \beta N_- = c, \tag{6}$$

где правая сторона принимает последовательно все целые значения от нуля до $\varkappa$. Тогда всю совокупность решений (N_+, N_-, N_L) уравнения (5) можно получить путем присоединения к каждому решению в целых неотрицательных числах неопределенного уравнения с двумя неизвестными (6) соответствующего значения $N_L = \varkappa - c$.

Каждому решению уравнения (5) будут соответствовать три многочлена P_{N_+}, P_{N_-}, P_L, через которые решение исследуемой задачи представится

---

* Под функцией, аналитической в области, мы понимаем функцию, которая в окрестности любой точки области может быть представлена степенным рядом. Такая функция в многосвязной области может оказаться многозначной.

в виде

$$\Phi^+(z) = e^{\frac{1}{\alpha}\Gamma^+(z)} P_{N_+}(z) \left\{ \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{-\varkappa_k} [P_{N_-}(z)]^{\beta} P_L(z) \right\}^{1/\alpha},$$

$$\Phi^-(z) = e^{\frac{1}{\beta}\Gamma^-(z)} [z^{-N_+} P_{N_+}(z)]^{\alpha\beta} z^{-N_-} P_{N_-}(z) [z^{-N_L} P_L(z)]^{1/\beta}. \tag{7}$$

Каждое решение будет зависеть от $N_+ + N_- + N_L + 1$ произвольных параметров. (Старшие коэффициенты у двух из многочленов можно положить равными единице.)

Об условиях разрешимости и способе решения уравнений (6) достаточно подробно говорилось в работах [1, 2], поэтому здесь на этом не останавливаемся.

Перейдем теперь к исследованию вопроса о разрешимости рассматриваемой задачи в классе аналитических однозначных функций.

Нетрудно проверить, что при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему целиком в любой из областей D_k^-, $k = 0, 1, \ldots, m$, функция $\Phi^-(z)$ возвращается к своему начальному значению. Следовательно, $\Phi^-(z)$ является не только аналитической, но и однозначной. Иначе обстоит дело с функцией $\Phi^+(z)$. Положим

$$P_{N_-} = P_{N_-^0} P_{N_-^1} \ldots P_{N_-^m}, \qquad P_{N_L} = P_0 P_1 \ldots P_m,$$

где $P_{N_-^k}$ — многочлены степеней N_-^k с нулями в областях D_k^-, а P_k — многочлены степеней N_k с нулями на L_k.

Совершим обход по некоторому замкнутому контуру, лежащему целиком в области D^+ и охватывающему одну из кривых L_k. Из структуры решения (7) следует, что аргумент $\Phi^+(z)$ получит при этом приращение

$$\frac{-\varkappa_k + \beta N_-^k + N_k}{\alpha} \cdot 2\pi. \tag{8}$$

Для того чтобы $\Phi^+(z)$ была однозначной, необходимо и достаточно, чтобы (8) было кратно 2π; при этом коэффициент кратности $-m_k$ может быть целым числом любого знака. Приравнивая $-m_k \cdot 2\pi$ выражению (8), придем к равенству

$$\alpha m_k + \beta N_-^k + N_k = \varkappa_k. \tag{9}$$

Это есть неопределенное уравнение в целых числах, в котором N_-^k, N_k — целые неотрицательные числа, а m_k — целое число любого знака; при этом числа N_-^k и N_k связаны равенствами

$$N_-^0 + N_-^1 + \ldots + N_-^m = N_-, \qquad N_0 + N_1 + \ldots + N_m = N_L. \tag{10}$$

Теорема 4. *Для существования аналитических однозначных решений краевой задачи* (1) *необходимо, а при выполнении необходимого условия* $\varkappa \geqslant 0$ *также и достаточно, чтобы все уравнения* (9) *были разрешимы в целых числах. При этом* N_-^k, N_k *должны быть неотрицательны и удовлетворять условиям* (10), *а в качестве* m_k *допустимы целые числа любого знака.*

Но каждое из уравнений (9) имеет одно очевидное решение $(0, 0, \varkappa_k)$. Если положить $N_- = 0$, $N_L = \varkappa$, то удовлетворяются уравнения (10), а также и (при $N_+ = 0$) уравнение (5). Отсюда вытекает следующая основная

Теорема 5. *Однородная нелинейная краевая задача* (1) *при* $\varkappa \geqslant 0$ *имеет, по крайней мере, одно аналитическое однозначное решение.*

Выразить явной формулой общее число параметров, от которых зависит решение, а также выписать сами решения — задача весьма сложная и в общем случае практически невыполнимая. Можно лишь указать необходимую для получения этого последовательность действий.

Пример. На контуре L двусвязной области, состоящем из внешней кривой L_0 и внутренней кривой L_1, задано краевое условие

$$[\Phi^+(t)]^2 = t^5 (t - z_1)^{-3} [\Phi^-(t)]^3, \qquad z_1 \in D_1^-.$$

Сохраним все предшествующие обозначения для лучшей ориентировки и возникающие уравнения будем обозначать той же цифрой, что и в теории, сопровождая их штрихом. Здесь $m=1$, $\varkappa=5$, $\varkappa_0=2$, $\varkappa_1=3$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

Будем иметь

$$2N^+ + 3N^- + N_L = 5, \tag{5'}$$

$$2N^+ + 3N^- = c, \tag{6'}$$

где $c=5-N_L$ пробегает шесть значений $0, 1, \ldots, 5$. При $c=1$ уравнение (6′) неразрешимо в целых неотрицательных числах. Для каждого же из остальных допустимых значений c существует по одному решению. И мы получаем пять троек целых неотрицательных решений уравнения (5′):

$$(0, 0, 5),\ (1, 0, 3),\ (0, 1, 2),\ (2, 0, 1),\ (1, 1, 0).$$

Им соответствуют пять аналитических (возможно, неоднозначных) решений, из них выпишем первое, третье и пятое:

$$[(z-z_1)^3 P_L(z)]^{1/2} \ldots [(z-z_1)^3 P_{N-}^3(z) P_L(z)]^{1/2} \ldots P_{N_+}(z)(z-z_1)^{3/2} P_{N_-}^{3/2}(z),$$

$$z^{-5} P_L(z) \ldots z^{-1} P_{N_-}(z) [z^{-2} P_L(z)]^{1/3} \ldots [z^{-2} P_{N_+}^2(z)]^{1/3} z^{-1} P_{N_-}(z).$$

Положим

$$P_{N_-} = P_{N_-^0} P_{N_-^1}, \quad P = P_0 P_1.$$

Для однозначности решений показатели степеней многочленов $P_{N_-^1}$, P_1 должны удовлетворять уравнениям

$$2m_1 + 3N_-^1 + N_1 = 3, \tag{9'}$$

$$N_-^0 + N_-^1 = N_-, \quad N_0 + N_1 = N_L. \tag{10'}$$

В правые части уравнений (10′) нужно последовательно подставлять пять найденных из уравнений (5′) пар значений N_-, N_L: (0, 5), (0, 3), (1, 2), (0, 1), (1, 0). Уравнение (9′) нужно решать совместно с каждой из пяти пар уравнений (10′).

Из-за весьма большой разветвленности случаев мы не в состоянии выписать их. Но читатель, затратив достаточно времени, может без большого труда все их получить.

В заключение разъясним одно кажущееся на первый взгляд парадоксальным обстоятельство. По мере сужения допустимого класса решений (от имеющих точки ветвления к аналитическим и от аналитических к однозначным) число произвольных параметров, как показывают и теоретические рассуждения и рассмотренный пример, не уменьшается, а увеличивается.

Разъяснение этого кажущегося парадокса простое. Увеличение числа параметров сопровождается уменьшением степени их произвола. В решении нелинейной задачи с допустимыми точками ветвления (соответствует общему решению линейной задачи) можно параметры подобрать так, чтобы решение в любых $\varkappa+1$ заданных точках плоскости принимало любые заданные значения (не обращающие одновременно в нуль). В классе аналитических функций дополнительным условиям можно удовлетворить лишь в том случае, если задаваемые точки распределяются в определенных пропорциях между D^+, D^- и L. В классе однозначных функций произвол параметров еще сокращается; здесь уже условия должны задаваться не вообще в D^- или L, а в строго определенных количествах в каждой из D_k^- и L_k.

Как уже указывалось в [1,2], случай α, β рациональных не представляет ничего нового. Возведением обеих частей (1) в степень, равную общему знаменателю показателей α, β, он сводится к рассмотренному.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило
9 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Д. Гахов, ДАН, 181, № 2 (1968). [2] F. D. Gakhov, Rew. roumain math. pures et appl., 13, № 9 (1968). [3] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963.