Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 2

УДК 519.34 *МАТЕМАТИКА*

О. В. ТИТОВ

О МИНИМАЛЬНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ, НАТЯНУТЫХ НАД МЯГКИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 XI 1972)

В последние годы появилось большое количество работ ([3], [5], [7], [10]), посвященных так называемым «вариационным задачам с жесткими препятствиями». В этих задачах требуется минимизировать функционал

$$F(u)=\int_G f(x, u, \nabla u)\,dx$$

на множестве функций u, которые, наряду с обычным условием закрепления на границе, удовлетворяют в области G неравенству $u\geqslant v$, где v — некоторая фиксированная функция. Известно, что к таким задачам сводятся многие вопросы теории вероятностей, оптимального управления и теории упругости.

Как и в обычном вариационном исчислении, наибольший интерес представляют классические функционалы типа интеграла Дирихле и функционал площади. В последнем случае задача сводится к построению гиперповерхности наименьшей площади, натянутой на заданный контур и лежащей над графиком функции v, что и оправдывает введение термина «жесткое препятствие». В цитированных выше статьях для вариационных задач с этими функционалами доказаны теоремы существования и единственности решения; кроме того, достаточно полно исследованы дифференциальные свойства экстремалей.

В некоторых случаях целесообразно накладывать на множество допустимых функций добавочные условия, записываемые в виде интегральных неравенств. Такого рода ограничения принято называть «мягкими препятствиями».

Пусть G — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 2$, D — открытое множество такое, что $D\subset\subset G$ и $V>0$ — некоторое число.

В настоящей работе рассматривается следующая вариационная

Задача P: минимизировать в соболевском пространстве $W_0^{1,1}(G)$ функционал площади

$$F(u)=\int_G \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx,$$

если в качестве «мягкого препятствия» взято дополнительное условие

$$\int_D u\,dx\geqslant V.$$

Предполагается, что все связные компоненты ∂G и ∂D являются $(n-1)$-мерными многообразиями класса C^5 и кроме того найдется число $R>0$ такое, что можно коснуться извне во всех граничных точках как множества G, так и множества D некоторым шаром радиуса R.

Вообще говоря, задача P может и не иметь решения. Действительно, взяв $n=2$, $G=\{x\in\mathbf{R}^2\colon\ |x|<1\}$, $D=\{x\in\mathbf{R}^2\colon\ |x|<r<1\}$, убедимся в том, что над $G \setminus \overline{D}$ график решения u является минимальной поверхностью вращения, т. е. катеноидом, а над D — поверхностью вращения постоянной средней кривизны, т. е. сферическим сегментом. Так как в этом случае $u|_{\partial G} = 0$, то необходимо имеем

$$V \leqslant \int\limits_D u\,dx < \pi r^3 \left[\frac{2}{3} + \ln\left(\frac{1}{r} + \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}\right)\right] = V_0,$$

откуда следует, что рассматриваемая задача неразрешима, если $V > V_0$.

Тем не менее справедлива следующая

Теорема. *При достаточно малых V задача P имеет единственное решение. Более того, это решение принадлежит классу $C^{1,\alpha}(\overline{G})$ с некоторым показателем Гёльдера $\alpha \in (0, 1]$, зависящим лишь от n, D и G.*

Доказательство теоремы сводится к решению ряда вспомогательных вариационных задач.

Пусть $\lambda > 0$ — некоторое число, χ_D — характеристическая функция множества D. Определим следующую вариационную задачу $P(\lambda)$: минимизировать в классе $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}(G)$ функционал

$$F_\lambda(u) = \int\limits_G [\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \lambda\chi_D u]\,dx.$$

Связь между задачами $P(\lambda)$ и P устанавливает простое

Предложение 1. *Если существуют числа $\Lambda > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$, зависящие лишь от n, D, G и такие, что при любом $\lambda \in (0, \Lambda]$ задача $P(\lambda)$ имеет единственное решение u_λ, причем $u_\lambda \in C^{1,\alpha}(\overline{G})$ и нормы $\|u_\lambda\|_{C^{1,\alpha}(\overline{G})}$ равномерно ограничены при всех λ, то основная теорема справедлива для любого V, удовлетворяющего неравенству*

$$0 < V \leqslant \int\limits_D u_\Lambda\,dx.$$

Исходя из условий, наложенных на множество D, можно построить семейство функций $\chi_D^{(\mu)} \in C_0^5(G)$, $\mu \in (0, 1]$, аппроксимирующих при $\mu \to 0$ функцию χ_D так, что выполнены некоторые технические требования, которые мы ради краткости опускаем.

Для исследования задачи $P(\lambda)$ рассмотрим для $\varepsilon \in (0, 1]$ вспомогательную задачу $P(\lambda, \mu, \varepsilon)$: минимизировать в $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(G)$ функционал

$$F_{\lambda,\mu,\varepsilon}(u) = \int\limits_G \left[\frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \lambda\chi_D^{(\mu)} u\right] dx.$$

Задача $P(\lambda, \mu, \varepsilon)$ представляет собой эллиптическую регуляризацию задачи $P(\lambda)$.

Используя прямые методы вариационного исчисления и теоремы о регулярности экстремалей ([1], [8]), можно доказать, что решение $u \in C^4(\overline{G})$ задачи $P(\lambda, \mu, \varepsilon)$ существует и единственно для любых $\varepsilon \in (0, 1]$, $\mu \in (0, 1]$ и $\lambda > 0$. В частности, u является классическим решением уравнения Эйлера

$$\varepsilon\Delta u + \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i}\left[\frac{u_i}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right] = -\lambda\chi_D^{(\mu)}(x) \tag{1}$$

с нулевыми граничными условиями.

Наиболее важным звеном в наших рассуждениях является

Предложение 2. *Пусть $\mu' \in (0, 1)$; тогда существуют константы $C_1 = C_1(n, D, G, \mu')$ и $C_2 = C_2(n, D, G)$ такие, что для любого решения*

$u \in C^4(\bar{G})$ *уравнения* (1) *с нулевыми граничными условиями и любыми* $\varepsilon \in (0, 1]$, $\mu \in [\mu', 1]$, $\lambda \in (0, C_2]$ *справедлива априорная оценка*

$$\sup_G |\nabla u| \leqslant C_1 \sqrt{\lambda}\,. \tag{2}$$

Доказательство существенно использует методику, впервые примененную де Джорджи ([4]) и развитую затем О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой ([1], [6]) и Р. Темамом ([9]).

С помощью неравенства (2) после стандартного применения шаудеровских оценок вплоть до границы выводим существование чисел $\alpha = \alpha(n, D, G, \mu')$ и $C_3 = C_3(n, D, G, \mu')$ таких, что равномерно по ε, μ и λ, указанных в предложении 2, имеем

$$\|u\|_{C^{3,\alpha}(\bar{G})} \leqslant C_3. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь вариационную задачу $P(\lambda, \mu)$: минимизировать в $W_0^{1,1}(G)$ функционал

$$F_{\lambda,\mu}(u) = \int_G [\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \lambda\chi_D^{(\mu)}u]\,dx.$$

Наличие оценки (3) позволяет довольно просто доказать существование константы $C_4 = C_4(n, D, G) \leqslant C_2$ такой, что при любых $\lambda \in (0, C_4]$ вариационная задача $P(\lambda, \mu)$ имеет единственное решение $u_{\lambda,\mu} \in C^3(\bar{G})$. Следовательно, $u_{\lambda,\mu}$ является классическим решением уравнения Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left[\frac{u_i}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right] = -\lambda\chi_D^{(\mu)}(x) \tag{4}$$

с нулевыми граничными условиями.

Из (2) вытекает, что при любых $\lambda \in (0, C_4]$, $\mu \in [\mu', 1]$

$$\sup_G |\nabla u_{\lambda,\mu}| \leqslant C_1 \sqrt{\lambda}\,. \tag{5}$$

Кроме того, используя, например, метод Ньютона — Канторовича для решения нелинейных уравнений в банаховом пространстве, можно доказать, что при любом фиксированном $\lambda \in (0, C_4]$ функция $\sup_G |\nabla u_{\lambda,\mu}|$ непрерывно зависит от μ при $0 < \mu \leqslant 1$.

Предложение 3. *Существуют константы* $C_5 = C_5(n)$ *и* $C_6 = C_6(n, D, G)$ *такие, что для любого решения* $u \in C^3(\bar{G})$ *уравнения* (4) *с нулевыми граничными условиями и любыми* $\mu \in (0, 1]$, $\lambda \in (0, C_4]$ *справедлива оценка*

$$\sup_G |\nabla u| \leqslant C_6\lambda, \tag{6}$$

если только $\sup_G |\nabla u| \leqslant C_5$.

При $n \geqslant 3$ это утверждение является простым следствием известного результата Кордеса ([2]), а при $n = 2$ его можно доказать непосредственно, следуя рассуждениям § 17, гл. III в ([1]).

Предложение 4. *Существует константа* $\Lambda \leqslant C_4$, *зависящая лишь от* n, D, G *и такая, что при любых* $\lambda \in (0, \Lambda]$, $\mu \in (0, 1]$

$$\sup_G |\nabla u_{\lambda,\mu}| \leqslant C_5. \tag{7}$$

Для доказательства положим $\Lambda = \min\{C_4;\ {}^1/_2 C_5 C_6^{-1};\ C_5^2 C_1^{-2}(n, D, G, {}^1/_2)\}$ и зафиксируем любое $\lambda \in (0, \Lambda]$. Пусть $M(\lambda)$ — множество тех $\mu \in (0, 1]$, для которых верно (7). Оно не пусто, ибо на основании оценки (5) и неравенства $\lambda \leqslant \Lambda \leqslant C_5^2 C_1^{-2}(n, D, G, {}^1/_2)$ убеждаемся в том, что $[{}^1/_2, 1] \subseteq M(\lambda)$.

Далее, если $\mu \in M(\lambda)$, то (6) и неравенство $\lambda \leqslant \Lambda \leqslant \leqslant {}^1/_2 C_5 C_6^{-1}$ дают

$$\sup_G |\nabla u_{\lambda,\mu}| \leqslant C_6 \lambda \leqslant {}^1/_2 C_5.$$

Отсюда, ввиду непрерывной зависимости $\sup\limits_G |\nabla u_{\lambda,\mu}|$ от μ, множество $M(\lambda)$ одновременно открыто и замкнуто, т. е. $M(\lambda) = (0, 1]$, что и требовалось.

Справедливость условия предложения 1 легко следует теперь из (7) и шаудеровских оценок вплоть до границы; это и доказывает основную теорему.

Замечание 1. Используя шаудеровские оценки внутри области и предыдущие рассуждения, можно показать, что решение u задачи P трижды непрерывно дифференцируемо на множестве $G \setminus \partial D$. Следовательно, над $G \setminus \bar{D}$ график u является классической минимальной гиперповерхностью, а над D — гиперповерхностью с ненулевой постоянной средней кривизной; в частности, заведомо $u \notin C^2(\bar{G})$. Отметим также, что при $n = 2$ знаменитая теорема Бернштейна гарантирует аналитичность u в $G \setminus \partial D$.

Замечание 2. Техника, развитая при доказательстве, позволяет распространить основной результат статьи и на функционалы типа интеграла Дирихле. На V при этом не накладывается никаких ограничений.

В заключение автор выражает благодарность Б. В. Шабату за ценные советы и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 1964. [2] H. O. Cordes, Math. Ann., **131**, № 3, 278 (1956). [3] M. Giaquinta, L. Pepe, Ann. Scuola norm. super. Pisa, **25**, № 3, 481 (1971). [4] E. de Giorgi, Mem. Acad. Sci. Torino, Ser. 3, **3**, № 1, 25 (1957). [5] E. Giusti, Arch. Rat. Mech. Anal., **40**, № 4, 251 (1971). [6] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, Comm. Pure Appl. Math., **23**, № 4, 677 (1970). [7] H. Lewy, G. Stampacchia, Ibid., **22**, № 2, 153 (1969). [8] G. Stampacchia, Ibid., **16**, № 4, 383 (1963). [9] R. Temam, Arch. Rat. Mech. Anal., **44**, № 2, 121 (1971). [10] F. Tomi, Math. Ann., **190**, № 3, 248 (1971).