Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 2

УДК 517 *МАТЕМАТИКА*

А. Р. ЦИЦКИШВИЛИ

О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

(*Представлено академиком П. Я. Кочиной 19 IX 1972*)

Пусть односвязная область Ω плоскости $z = x + iy$ имеет границу, состоящую из конечного числа m круговых дуг и прямолинейных отрезков. Концы указанных дуг — вершины многоугольной области — обозначим через $b_1, b_2, \ldots, b_m$, а величины внутренних по отношению к области Ω углов в них — через $\pi\nu_1, \pi\nu_2, \ldots, \pi\nu_m$.

Мы рассмотрим задачу отыскания выражения для функции $z = z(\zeta)$, $\zeta = t + i\tau$, конформно отображающей верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ на внутренность кругового m-угольника. Точки плоскости ζ, которые при отображении $z = z(\zeta)$ переходят в вершины m-угольника, будем обозначать соответственно через $a_1, a_2, \ldots, a_m$, причем $-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_m < +\infty$.

Напишем уравнение контура кругового многоугольника в виде

$$A(t)z(t)\overline{z(t)} - i\overline{B(t)}z(t) + iB(t)\overline{z(t)} + D(t) = 0, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$ — заданные кусочно-постоянные функции ($A(t)$, $D(t)$ — действительные функции), удовлетворяющие условию $\Delta(t) = B(t)\overline{B(t)} - A(t)D(t) = 1$, а $\overline{z(t)} = x(t) - iy(t)$.

Искомая функция $z(\zeta)$ должна удовлетворять граничному условию (1). Известно также, что функция $z(\zeta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Шварца ([1–6])

$$z'''(\zeta)/z'(\zeta) - {}^3/_2[z''(\zeta)/z'(\zeta)]^2 = R(\zeta), \tag{2}$$

$$R(\zeta) = \sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_k^2)(\zeta - a_k)^{-2} + c_k(\zeta - a_k)^{-1}\right\}. \tag{3}$$

В выражение (3) входят неизвестные действительные параметры a_k, c_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, на которые накладываются три условия:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{m}\left[a_k c_k + \frac{1}{2}(1-\nu_k^2)\right] = 0, \quad \sum_{k=1}^{m}[a_k^2 c_k + a_k(1-\nu_k^2)] = 0. \tag{4}$$

Известно, что три из постоянных a_k можно брать произвольно. Следовательно, в действительности имеется лишь $2(m-3)$ неизвестных параметров. Уравнение (2) в случае $m = 3$ полностью определено.

Если ввести обозначение $z'(\zeta) = [v(\zeta)]^{-2}$, тогда для функции $v(\zeta)$ уравнение (2) принимает вид

$$2v''(\zeta) + R(\zeta)v(\zeta) = 0. \tag{5}$$

Пусть $v_1(\zeta)$, $v_2(\zeta)$ — два линейно независимых решения уравнения (5). Для нашего случая без ограничения общности можно считать, что вронскиан $W[v_1\, v_2] = 1$. Тогда функция $z_1(\zeta) = v_1(\zeta) / v_2(\zeta)$ является частным решением (2), а общее решение уравнения (2) дается равенством

$$z(\zeta) = [av_1(\zeta) + bv_2(\zeta)][cv_1(\zeta) + dv_2(\zeta)]^{-1}, \tag{6}$$

где a, b, c, d — постоянные, удовлетворяющие условию $ad - bc = 1$. Способ определения a, b, c, d дается в работах ([5], [6]).

Методы нахождения функции $z(\zeta)$, а также соответствующую библиографию можно найти в работах ([1–6]).

Связь неизвестных параметров a_k, c_k с геометрическими характеристиками многоугольника заранее неизвестна. В этом состоит основная трудность метода Шварца. Ниже предлагается другой путь решения поставленной выше задачи, позволяющий установить такую связь.

Очевидно, что функции $u_1(\zeta) = av_1(\zeta) + bv_2(\zeta)$, $u_2(\zeta) = cv_2(\zeta) + dv_2(\zeta)$ — линейно независимые решения уравнения (5).

Согласно принципу Римана — Шварца, функции $u_1(\zeta)$, $u_2(\zeta)$ можно аналитически продолжить в симметричные точки относительно оси t функциями $\overline{u_1(\bar\zeta)}$, $\overline{u_2(\bar\zeta)}$.

Из формулы (2) следует, что если функция $z(\zeta)$ является решением (2), тогда $-\overline{z(\bar\zeta)}$ тоже удовлетворяет этому уравнению, ибо $\overline{R(\bar\zeta)} = R(\zeta)$. Очевидно, что функции $\overline{u_1(\bar\zeta)}$, $\overline{u_2(\bar\zeta)}$ являются решениями (5).

Исходя из условия 1) и уравнения (5), можно доказать справедливость равенств

$$\begin{aligned} u_1(t) &= B(t)\overline{u_1(t)} - iD(t)\overline{u_2(t)}, \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty; \\ u_2(t) &= iA(t)\overline{u_1(t)} + \overline{B(t)}\,\overline{u_2(t)}, \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Введем вектор $\Phi(\zeta) = [u_1(\zeta), u_2(\zeta)]$ и матрицу

$$G(t) = \begin{Vmatrix} B(t) & -iD(t) \\ iA(t) & \overline{B(t)} \end{Vmatrix}, \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty; \tag{8}$$

тогда условия (7) можно записать так:

$$\Phi(t) = G(t)\overline{\Phi(t)}, \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty. \tag{9}$$

Можно доказать, что задача отыскания вектора $\Phi(\zeta)$ при условии (9) есть задача Римана — Гильберта.

Сведем задачу (9) к задаче сопряжения. Для этого продолжим вектор $\Phi(\zeta)$ в нижнюю полуплоскость согласно ([7], [8]). Свяжем с вектором $\Phi(\zeta)$ вектор $\Phi_*(\zeta)$, определенный в нижней полуплоскости: $\Phi_*(\zeta) = \overline{\Phi(\bar\zeta)}$.

Если этот кусочно-голоморфный вектор обозначить опять через $\Phi(\zeta)$, тогда условие (9) можно переписать как

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^{-1}(t), \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty, \tag{10}$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ — граничные значения вектора $\Phi(t)$ из верхней и нижней полуплоскостей соответственно. Те и только те решения задачи (10), которые удовлетворяют условию

$$\Phi_*(\zeta) = \Phi(\zeta), \tag{11}$$

дают решения задачи Римана — Гильберта (9) ([7], [8]).

В частности, если матрица $G(t)$ треугольная, тогда решение задачи (10) записывается с помощью интегралов типа Коши от элементарных функций. К этому случаю относится линейный многоугольник. Действительно, пусть $A(t) \equiv 0$, тогда задача сопряжения для функции $z(t)$, очевидно, будет иметь вид

$$z^+(t) = B(t)[\overline{B(t)}]^{-1}z^-(t) + iD(t)[\bar B(t)]^{-1}, \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty. \tag{12}$$

В случае ограниченного линейного многоугольника каноническая функция задачи (12) класса $h(a_1, a_2, \ldots, a_m) = h_m$, для $\operatorname{Im}\zeta > 0$, имеет вид

$$\chi_*(\zeta) = (\zeta + i)^{\varkappa} \prod_{k=1}^{m} (\zeta - a_k)^{\alpha_k}, \qquad 0 < \alpha_k < 1,$$

где $\varkappa$ — индекс класса h_m (для этого класса $\varkappa \leqslant 0$).

Единственное решение задачи (12) класса h_m дается формулой [8]

$$z(\zeta)=\frac{\chi_*(\zeta)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta+i}{t+i}\,\frac{D(t)}{\overline{B(t)}\,\chi_*^+(t)}\,\frac{dt}{t-\zeta} \tag{13}$$

при условиях

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\frac{D(t)\,dt}{\overline{B(t)}\,\chi_*^+(t)\,(t+i)^2}=0,\quad k=0,1,2,\ldots,-\varkappa-2; \tag{14}$$

для $\varkappa=0$ или $\varkappa=-1$ условия (14) отпадают.

Число уравнений (14) для определения a_k будет, вообще, $m-3$. Если число уравнений будет меньше, тогда в некоторых точках $z'(a_j)=0$ $(z'(\zeta)=dz(\zeta)/d\zeta)$.

Следовательно, мы получили другой вид формулы Кристоффеля — Шварца. Аналогично можно рассмотреть все возможные случаи линейных многоугольников.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Возьмем произвольную точку a_j и рассмотрим уравнение

$$\det\|G_{j-1}G_j^{-1}-I\lambda\|=0, \tag{15}$$

где I — единичная матрица.

Пусть λ_j^1, λ_j^2 — корни уравнения (15), которые могут быть всегда представлены как

$$\lambda_j^k=\exp(2\pi i\rho_j^k),\quad k=1,2. \tag{16}$$

Числа ρ_j^1, ρ_j^2 действительные, определенные с точностью до целых слагаемых. Эти слагаемые подбираются так: $\rho_j^1-\rho_j^2=\nu_j$. Одновременно числа ρ_j^1, ρ_j^2 должны удовлетворять условию Фукса

$$\sum_{j=1}^m(\rho_j^1+\rho_j^2)=m-2.$$

Уравнение (5) можно привести к системе уравнений, записанной в векторной форме:

$$[v(\zeta),v'(\zeta)]'=[v(\zeta),v'(\zeta)]\begin{Vmatrix}0 & -{}^1/_2R(\zeta)\\ 1 & 0\end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Введем новый искомый вектор (что всегда возможно):

$$[v(\zeta),v'(\zeta)]=[\Psi(\zeta),r^2(\zeta)\Psi'(\zeta)]\begin{Vmatrix}r(\zeta) & r'(\zeta)\\ 0 & r^{-1}(\zeta)\end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Тогда систему (17) можно записать в виде

$$[\Psi(\zeta),r^2(\zeta)\Psi'(\zeta)]'=[\Psi(\zeta),r^2(\zeta)\Psi'(\zeta)]\begin{Vmatrix}0 & -{}^1/_2r^2(\zeta)R(\zeta)-r(\zeta)r'(\zeta)\\ r^{-2}(\zeta) & 0\end{Vmatrix}, \tag{19}$$

$$v(\zeta)=\Psi(\zeta)r(\zeta),\quad r(\zeta)=\prod_{j=1}^m(\zeta-a_j)^{\varphi_j},\quad \varphi_j=\frac{1}{2}(1-\rho_j^1-\rho_j^2). \tag{20}$$

Очевидно, что для системы (19) точка $\zeta=\infty$ является обыкновенной [9].

Частное решение системы (19), нормированное в точке e, запишем так:

$$\chi_e(\zeta)=\begin{Vmatrix}\Psi_1(\zeta) & r^2(\zeta)\Psi_1'(\zeta)\\ \Psi_2(\zeta) & r^2(\zeta)\Psi_2'(\zeta)\end{Vmatrix}, \tag{21}$$

где e — любая точка в области $\operatorname{Im}\zeta\geqslant 0$, отличная от точек a_k. При этом $\chi_e(\infty)=I$.

Общее решение системы (19) дается формулой $\chi(\zeta)=T\chi_e(\zeta)$, а решение системы (17) так:

$$\chi_1(\zeta)=T\chi_e(\zeta)\begin{Vmatrix}r(\zeta) & r'(\zeta)\\ 0 & r^{-1}(\zeta)\end{Vmatrix},\quad T=\begin{Vmatrix}a & b\\ c & d\end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Систему (19) всегда можно записать в виде

$$\chi'(\zeta) = \chi(\zeta) \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{U_j^{(2)}}{(\zeta - a_j)^2} + U_j^{(1)} \left(\frac{1}{\zeta - a_{j+1}} - \frac{1}{\zeta - a_j} \right) \right\}, \tag{23}$$

где $U_j^{(2)}, U_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$,— действительные постоянные матрицы, зависящие от ν_k, c_k, a_k.

Решение системы (23) можно представить в виде

$$\chi_e(\zeta) = I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \ldots, j_\nu}^{(1,\ldots,m)} \sum_{r_1, \ldots, r_\nu}^{(1,2)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} L_e \left(\begin{matrix} \delta_{1r_1} & & \delta_{1r_\nu} \\ a_{j_1+1} & \ldots & a_{j_\nu+1} \\ r_1 & & r_\nu \\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| \zeta \right), \tag{24}$$

где коэффициенты ряда (24) определяются рекуррентными формулами с помощью гиперлогарифмов ([10]).

Ряд (24) является целой функцией относительно матриц $U_j^{(2)}, U_j^{(1)}$ и, следовательно, относительно параметров $c_1, c_2, \ldots, c_m$ ([10], [11]).

Искомый вектор $\Phi(\zeta)$ при обходе точки a_j в положительном направлении умножается слева на матрицу $G_{j-1}G_j^{-1}$, когда обход начинается с верхней полуплоскости. Матрица $T^{-1}G_{j-1}G_j^{-1}T$ представляется значением матрицы $T^{-1}\chi_e(\zeta)$ в точке e, в которую мы придем, отправляясь из точки e и обходя точку a_j в положительном направлении вдоль простой петли:

$$T^{-1}G_{j-1}G_j^{-1}T = \sigma_j \left(I + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1 \ldots j_\nu}^{(1,\ldots,m)} \sum_{r_1 \ldots r_\nu}^{(1,2)} U_{j_1}^{(r_1)} \ldots U_{j_\nu}^{(r_\nu)} P_{je} \left(\begin{matrix} \delta_{1r_1} & & \delta_{1r_\nu} \\ a_{j_1+1} & \ldots & a_{j_\nu+1} \\ r_1 & & r_\nu \\ a_{j_1} & \ldots & a_{j_\nu} \end{matrix} \middle| e \right) \right), \tag{25}$$

где $\sigma_j = \exp \pi i (1 - \rho_j^1 - \rho_j^2)$, $\delta_{1r_\nu} = \{0, r_\nu \neq 1; 1, r_\nu = 1\}$.

Коэффициенты ряда (25) определяются рекуррентными формулами ([10]). Для краткости перепишем систему (25) так:

$$TG_{j-1}G_j^{-1}T^{-1} = K_j \equiv \begin{Vmatrix} p_j & q_j \\ r_j & s_j \end{Vmatrix}, \tag{26}$$

где K_j — матрица, стоящая в правой части (25), умноженная на σ_j.

Приравнивая инварианты левых и правых частей, согласно равенству (26), получим ([10])

$$\lambda_j^1 + \lambda_j^2 = p_j + s_j, \quad \lambda_j^1\lambda_j^2 = p_j s_j - r_j q_j = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{27}$$

Доказывается, что число точек a_k, в которых система (19) имеет простые полюсы, равно двум. В этих двух точках равенства (27) являются тождественными ([10]).

Известно, что одна матрица K_j выражается через остальные матрицы, следовательно, в одной точке равенства (27) являются следствиями других равенств. После этого, очевидно, что из $2m$ равенств остается $2(m-3)$ равенств, которые являются уравнениями для определения $2(m-3)$ параметров a_k, c_k, что мы и хотели получить (в случае $m = 3$ все равенства (27) тождественны).

Можно показать, что равенства (27) не зависят от точки e ([10]).

Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
15 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М., 1950. [2] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966. [3] В. Коппенфельс, Ф. Штальман, Практика конформных отображений, М., 1963. [4] А. Гурвиц, Р. Курант, Теория функции, М., 1968. [5] П. Я. Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод, М., 1952. [6] П. Я. Полубаринова-Кочина, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6, 579 (1939). [7] Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М., 1970. [8] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [9] Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939. [10] М. А. Лаппо-Данилевский, Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1957. [11] А. Р. Цицкишвили, Тр. Тбилисск. математич. инст АН ГрузССР, 35, 67 (1969).