Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 532.51 ГИДРОМЕХАНИКА

Н. Х. ИБРАГИМОВ

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 20 X 1972)

Классические законы сохранения энергии, количества движения, момента количества движения справедливы для любой сплошной среды, удовлетворяющей довольно общим предположениям ([1]). Эти законы сохранения связаны со свойствами симметрии рассматриваемой среды; так, например, закон сохранения момента количества движения вытекает из постулата Больцмана о симметричности тензора напряжений.

В настоящей работе рассматриваются движения идеальной жидкости с более широкими свойствами симметрии (групповыми свойствами ([2])), чем произвольная сплошная среда. Основываясь на этом расширении симметрии, находятся законы сохранения, отличные от классических.

1. Идеальная сжимаемая жидкость. Рассмотрим уравнения движения политропического газа

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \\ \rho_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \\ p_t + \mathbf{v}\cdot\nabla p + \gamma p\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \gamma = c_p/c_v = \text{const}. \end{gathered} \tag{1}$$

В дальнейшем радиус-вектор движущейся точки с координатами x^i будем обозначать $\mathbf{r} = (x^1, \ldots, x^n)$, где n принимает значения 1, 2 и 3 соответственно для одномерного, плоского и пространственного течений. Точка между векторами обозначает скалярное произведение n-мерных векторов; в частности, $\mathbf{v}\cdot\nabla = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Известно ([2]), что уравнения (1) инвариантны относительно более широкой непрерывной группы преобразований, чем уравнения движения произвольной идеальной сжимаемой жидкости. Известно также, что при

$$\gamma = (n+2)/n \tag{2}$$

происходит дальнейшее расширение группы, допускаемой уравнениями движения идеальной сжимаемой жидкости. Здесь мы воспользуемся групповыми свойствами уравнений (1) для получения законов сохранения следующим образом. Рассмотрим сначала частный случай — изэнтропическое потенциальное движение газа. В этом случае вместо уравнений (1) можно рассматривать уравнение для потенциала $\Phi(t, \mathbf{r})$

$$\Phi_{tt} + 2\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi_t + \nabla\Phi\cdot(\nabla\Phi\cdot\nabla)\nabla\Phi + (\gamma-1)(\Phi_t + {}^1/_2|\nabla\Phi|^2)\nabla\Phi = 0, \tag{3}$$

которое получается из вариационного принципа с функцией Лагранжа

$$L = (\Phi_t + {}^1/_2|\nabla\Phi|^2)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

При этом групповые свойства уравнений (1) и уравнения (3) полностью соответствуют.

Вычислив группу, допускаемую уравнением (3), и применив теорему Э. Нётер ([3]), находим законы сохранения для уравнения (3). (Подробное изложение вопросов, связанных с теоремой Нётер и ее приложениями, можно найти в ([4]).) Затем полученные законы сохранения переписываем в переменных $\mathbf{v}$, p, ρ, используя определение потенциала, связь между давлением p и плотностью ρ в изэнтропическом течении и интеграл Лагранжа — Коши.

Ниже выписаны законы сохранения, найденные указанным выше способом. Обозначены: $\Omega(t)$ — произвольный n-мерный объем, движущийся вместе с жидкостью, $S(t)$ — граница $\Omega(t)$, $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к $S(t)$, $d\omega$ — элемент объема, dS — элемент поверхности.

Инвариантность уравнения (3) относительно однопараметрической группы преобразований $\Phi \to \Phi + a$ с параметром a и группы Галилея (сдвиг времени $t \to t + a$ и координат $x^i \to x^i + a^i$, вращения, переход в равномерно движущуюся систему координат) приводит к следующим классическим законам сохранения, справедливым также в более общем случае движения сплошной среды.

Закон сохранения массы:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \rho\, d\omega = 0. \tag{4}$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \left(\frac{1}{2}\rho\,|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma+1}\right) d\omega = -\int\limits_{S(t)} p\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{5}$$

Закон сохранения количества движения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \rho\mathbf{v}\, d\omega = -\int\limits_{S(t)} p\boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{6}$$

Закон сохранения момента количества движения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \rho\,(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\, d\omega = -\int\limits_{S(t)} p\,(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nu})\, dS. \tag{7}$$

Закон движения центра масс:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \rho\,(t\mathbf{v}-\mathbf{r})\, d\omega = -\int\limits_{S(t)} tp\boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{8}$$

Для политропического газа, удовлетворяющего условию (2), выполняются еще следующие специальные законы сохранения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} [t(\rho\,|\mathbf{v}|^2 + np) - \rho\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}]\, d\omega = -\int\limits_{S(t)} p\,(2t\mathbf{v}-\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} [t^2(\rho\,|\mathbf{v}|^2 + np) - \rho\mathbf{r}\cdot(2t\mathbf{v}-\mathbf{r})]\, d\omega = -\int\limits_{S(t)} 2tp\,(t\mathbf{v}-\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{10}$$

Законы сохранения (4) — (10) справедливы для любых решений уравнений (1). Кроме того, для потенциального течения политропического газа при произвольном γ справедлив следующий закон сохранения (Φ — потенциал):

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} \left[\frac{2\gamma+n(\gamma-1)}{\gamma+1}\, t\left(\frac{1}{2}\rho\,|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\gamma-1}\right) - \rho\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} - \frac{n(\gamma-1)-2}{\gamma+1}\rho\Phi\right] d\omega =$$

$$= -\int\limits_{S(t)} p\left(\frac{2\gamma+n(\gamma-1)}{\gamma+1}\, t\mathbf{v} - \mathbf{r}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{11}$$

При условии (2) формула (11) переходит в формулу (9).

Для пространственного течения ($n=3$) условие (2) ($\gamma={}^5/_3$) выполняется для одноатомного газа. Таким образом, для одноатомного газа справедливы дополнительные законы сохранения (9), (10). Аналогичная ситуация — появление дополнительных законов сохранения — имеет место как в классической механике (движение частицы в ньютоновском поле тяготения или в кулоновском электростатическом поле), так и в квантовой механике (атом водорода).

2. Идеальная несжимаемая жидкость. Для уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{12}$$

также имеются дополнительные законы сохранения, отличные от классических законов сохранения (4) — (8).

Один из этих дополнительных законов сохранения справедлив для потенциальных течений и имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\left(\frac{n+2}{2}t\,|\mathbf{v}|^2 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{v} - n\Phi\right)d\omega = -\int\limits_{S(t)} p\,[(n+2)t\mathbf{v} - \mathbf{r}]\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{13}$$

Формально этот закон сохранения можно получить из формулы (11) предельным переходом $\gamma\to\infty$.

Заметим теперь, что для любого вектора $\mathbf{v}$, удовлетворяющего условию $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$, справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega}\mathbf{v}\,d\omega = \int\limits_{S}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu})\,\mathbf{r}\,dS.$$

Поэтому для идеальной несжимаемой жидкости можно следующим образом обобщить закон сохранения количества движения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,d\omega = -\int\limits_{S(t)}\left[p\mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\nu} - \left(\frac{d\mathbf{f}}{dt}\cdot\mathbf{r}\right)(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nu})\right]dS,$$

где $\mathbf{f}=(f^1(t),\ldots,f^n(t))$ — произвольная гладкая вектор-функция времени t. Этот закон сохранения является следствием инвариантности уравнений (12) относительно перехода в любую движущуюся поступательно систему координат $\mathbf{r}\to\mathbf{r}+\mathbf{f}(t)$.

В случае $n=2$ уравнения изэнтропического течения политропического газа при условии (2) можно интерпретировать как уравнения движения потока жидкости в теории мелкой воды ([5]). Для этого в уравнениях (1) нужно положить $p={}^1/_2\rho^2$, а плотность ρ заменить на gh, где g — ускорение силы тяжести, h — глубина потока. В результате этого получим уравнения

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + g\nabla h = 0,$$
$$h_t + \mathbf{v}\cdot\nabla h + h\operatorname{div}\mathbf{v} = 0.$$

Специальные законы сохранения (9) и (10) при этом примут вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} h\,[t(|\mathbf{v}|^2+gh) - \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}]\,d\omega = -\int\limits_{S(t)}\frac{1}{2}gh^2(2t\mathbf{v}-\mathbf{r})\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega(t)} h\,[t^2(|\mathbf{v}|^2+gh) - \mathbf{r}\cdot(2t\mathbf{v}-\mathbf{r})]\,d\omega = -\int\limits_{S(t)} gth^2(t\mathbf{v}-r)\cdot\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{15}$$

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
16 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Серрин, Математические основы классической механики жидкости, ИЛ, 1963. [2] Л. В. Овсянников, Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1962. [3] E. Noether, Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen Nachrichten, Math.-Phys. Kl., 2, 235 (1918) (пер. в сб. Вариационные принципы механики, М., 1959, стр. 611). [4] Н. Х. Ибрагимов, Группы Ли в некоторых вопросах математической физики, Новосибирск, 1972. [5] Дж. Дж. Стокер, Волна на воде, ИЛ, 1959.