Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 4

УДК 539.3 *ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ*

Р. Д. БАНЦУРИ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КЛИНА С УПРУГИМ КРЕПЛЕНИЕМ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 23 XI 1972)

Пусть упругая тонкая пластинка на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ занимает угол $-\alpha < \arg\zeta < \alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2\pi$.

Определим упругое равновесие пластинки в следующих условиях: одна сторона угла $\arg\zeta = -\alpha$ свободна от внешних напряжений, а к другой стороне $\arg\zeta = 0$ приклеен прямолинейный стрингер. В конце стрингера приложена сосредоточенная сила P, направленная вдоль оси ξ.

Будем предполагать жесткость стрингера на изгиб пренебрежимо малой, т. е. считать, что $\sigma_\eta = 0$.

Из условий равновесия любой части $(0, \xi)$ имеем

$$p + k\sigma_\xi - h\int_0^\xi \tau_{\xi\eta}(s)\,ds = 0, \quad 0 < \xi < \infty,$$

где $k = E_0 S_0 / E$, S_0 — поперечное сечение стержня, h — толщина пластинки, E и E_0 — модули упругости пластинки и стержня соответственно.

Отобразим область, занимаемую телом, на бесконечную полосу $(-1 < y < 0, -\infty < x < \infty)$. Отображение дается функцией

$$\zeta = e^{\alpha z}, \qquad z = x + iy.$$

Методом Н. И. Мусхелишвили [1] сформулированная выше задача сводится к задаче определения аналитических в указанной полосе функций $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, со следующими граничными условиями:

$$\varphi_0(z) + \overline{\psi_0(z)} = -i\alpha e^{\alpha z}\tau^0_{\xi\eta}(e^{\alpha z}), \qquad \operatorname{Im} z = 0, \tag{1}$$

$$\varphi_0(z) + \frac{e^{-2i\alpha} - 1}{\alpha}\overline{\varphi'(z)} + \psi_0(z) = 0, \quad \operatorname{Im} z = -1, \tag{2}$$

$$2k(\varphi_0(z) + \overline{\varphi_0(z)}) = \alpha e^{\alpha z}\left(h\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{\alpha s}\tau_{\xi\eta}(e^{\alpha s})\,ds - p\right), \quad \operatorname{Im} z = 0, \tag{3}$$

где

$$\varphi_0(z) = \frac{d}{dz}\varphi(e^{\alpha z}), \quad \psi_0(z) = \frac{1}{\alpha}\varphi_0'(z) + \frac{d}{dz}\psi(e^{\alpha z}),$$

$\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ — комплексные потенциалы для клина $-\alpha < \arg\zeta < 0$.

Аналитические функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ представим в следующем виде [2]:

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi} i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{t}\operatorname{sh} t - te^{-i\alpha}(\sin\alpha)/\alpha}{\operatorname{sh}^2 t - t^2(\sin^2\alpha)/\alpha^2}\right)T(t)e^{-itz}dt - c, \; -1 < \operatorname{Im} z < 0, \tag{4}$$

$$\psi_0(z) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi i}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-t}\operatorname{sh} t - te^{i\alpha}(\sin\alpha)/\alpha}{\operatorname{sh}^2 t - t^2(\sin^2\alpha)/\alpha^2} + 2\right)T(t)e^{-itz}dt + \bar c, -1 < \operatorname{Im} z < 0, \tag{5}$$

где $T(t)$ — преобразование Фурье функции $\alpha e^{\alpha x}\tau_{\xi\eta}(e^{\alpha x})$,

$$c = \frac{\pi\alpha\,(\alpha - \sin\alpha e^{-i\alpha})}{2\sqrt{2\pi}\,(\alpha^2 - \sin^2\alpha)}\,T(0), \qquad T(0) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}h}.$$

В точке $t = 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Внося представления (4) и (5) в граничные условия (1)—(3) и принимая во внимание, что $T(t) = \overline{T(-t)}$, получим, что условия (1) и (2) тождественно удовлетворены, а условие (3) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - t\,(\sin 2\alpha)/2\alpha}{\operatorname{sh}^2 t - t^2\,(\sin^2\alpha)/\alpha^2}\,t\Phi_1(t)\,e^{-itx}\,dt + \frac{h\alpha}{2k}\,\varphi_1(x)\,e^{\alpha x} =$$

$$= f(x) - 4\operatorname{Re}c\,\frac{e^{2\pi x}}{1 + e^{2\pi x}}, \tag{6}$$

где $f(x)$ — заданная функция, экспоненциально убывающая на бесконечности, $\Phi_1(t)$ — преобразование Фурье функции

$$\varphi_1(x) = \alpha\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\alpha s}\tau_{\xi\eta}(e^{\alpha s})\,ds - \frac{p}{h}\,\frac{e^{2\pi x}}{1 + e^{2\pi x}}.$$

Легко видеть, что

$$-\,it\Phi_1(t) = T(t) - \frac{tT(0)}{2\operatorname{sh}{}^1/_2 t}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{7}$$

Если в уравнение (6) вместо $4\operatorname{Re}c\,\dfrac{e^{2\pi x}}{1 + e^{2\pi x}}$ подставить $4\operatorname{Re}c\,\dfrac{\quad}{1 + e^{2\pi x}}$, $0 < \varepsilon < 2\pi$, и применить преобразование Фурье, то получим

$$\frac{\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - t\,(\sin 2\alpha)/2\alpha}{\operatorname{sh}^2 t - t^2\,(\sin^2\alpha)/\alpha^2}\,t\Phi_1(t) + \frac{h\alpha}{2k}\,\Phi_1(t - i\alpha) =$$

$$= F(t) - \frac{8i\operatorname{Re}c}{\sqrt{2\pi}\operatorname{sh}{}^1/_2\,(t + i\varepsilon)}, \quad -\infty < t < \infty, \tag{8}$$

где

$$F(t) = \frac{p\alpha}{\sqrt{2\pi}ki\operatorname{sh}{}^1/_2\,(t - i\alpha)} - \frac{p}{4\pi h}\left(\frac{\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - t\,(\sin 2\alpha)/2\alpha}{\operatorname{sh}^2 t - t^2\,(\sin^2\alpha)/\alpha^2} - 2\operatorname{Re}c\cdot\frac{1}{t}\right)\frac{t}{\operatorname{sh}{}^1/_2 t}.$$

Следовательно, рассматриваемая задача сводится к следующей: найти функцию $\Phi_1(w)$, $w = t + i\tau$, аналитическую в полосе $-\alpha < \operatorname{Im}w < \alpha$ всюду, за исключением одной точки, где она может иметь полюс первого порядка, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую равенству (8).

Легко показать, что коэффициент задачи (8) можно представить в следующем виде:

$$t\,\frac{\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t - t\,(\sin 2\alpha)/2\alpha}{\operatorname{sh}^2 t - t^2\,(\sin^2\alpha)/\alpha^2} = it\,\frac{X(t - i\alpha)\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2\alpha}(t - i\alpha)}{X(t)\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2\alpha}t}, \tag{9}$$

$$X(w) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{2i\alpha}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln G(t)\operatorname{cth}\dfrac{\pi}{\alpha}(t - w)\,dt\right), & -\alpha < \operatorname{Im}w < 0, \\ \dfrac{1}{G(w)}\exp\left(\dfrac{1}{2i\alpha}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln G(t)\operatorname{cth}\dfrac{\pi}{\alpha}(t - w)\,dt\right), & -Q < \operatorname{Im}w < \alpha; \end{cases}$$

$$G(w) = \frac{\operatorname{sh}w\operatorname{ch}w - w\,(\sin 2\alpha)/2\alpha}{\operatorname{sh}^2 w - w^2\,(\sin^2\alpha)/\alpha^2}\operatorname{th}\frac{\pi}{2\alpha}w. \tag{10}$$

Применяя формулы Сохоцкого — Племеля, легко убедиться, что $X(w)$ — аналитическая функция в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} w < \alpha$, кроме точки $w_0 = i\tau_0$, где через w_0 обозначен корень функции $G(w)$.

Пусть β — корень уравнения $\operatorname{tg} 2\beta = 2\beta$ $(\beta \approx 2{,}247)$. Если $\alpha < \beta$, тогда $\tau_0 > \alpha$. Если $\alpha \geqslant \beta$, тогда $\tau_0 \leqslant \alpha$.

Отсюда следует, что если $\alpha < \beta$, то $X(w)$ аналитическая в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} w < \alpha$; если $\beta < \alpha$, тогда функция $X(w)$ в точке $w = i\tau_0$ имеет полюс первого порядка.

Введем обозначение

$$\frac{\Gamma w \Phi_1(w)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\alpha} w \cdot X(w)} = \Psi_1(w), \qquad -\alpha < \operatorname{Im} w < \alpha. \tag{11}$$

Тогда, согласно равенству (9), граничная задача (8) примет вид

$$(\alpha + it)\Psi_1(t) + \frac{\alpha h}{2k}\Psi_1(t - i\alpha) = \frac{(it + \alpha) F(t)}{X(t - i\alpha) \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\alpha} t} +$$

$$+ \frac{8 \operatorname{Re} c(t - i\alpha)}{\sqrt{2\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\alpha} t \operatorname{sh}^{1/2}(t + i\varepsilon) X(t - i\alpha)}, \tag{12}$$

$$-\infty < t < \infty.$$

Отсюда, произведя обратное преобразование Фурье и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\psi_1'(x) - \alpha\left(1 + \frac{h}{2k} e^{\alpha x}\right)\psi_1(x) = f_1(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{13}$$

где $\psi_1(x)$ — обратное преобразование Фурье функции $\Psi_1(t)$, а $f_1(x)$ — заданная функция; $f_1(x)$ аналитически продолжима в полосе $-\pi/(2\alpha) - 1/2 < \operatorname{Im} z < \pi/(2\alpha) + 1/2$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to\infty} |f_1(z)| = c_1, \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-\alpha x}|f_1(z)| = c_2,$$

c_1 и c_2 — постоянные.

Исчезающее на бесконечности решение дифференциального уравнения (13) дается формулой

$$\psi_1(x) = -e^{\alpha x + \frac{h}{2k} e^{\alpha x}} \int_x^\infty f_1(s) e^{-\alpha s - \frac{h}{2k} e^{\alpha s}} ds, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{14}$$

Легко показать, что функция $\psi_1(x)$ аналитически продолжима в полосу $-1/2 - \pi/(2\alpha) < \operatorname{Im} z < \pi/(2\alpha) + 1/2$ и экспоненциально убывает на бесконечности с порядком α.

Отсюда вытекает, что функция $\Psi_1(w)$ аналитическая в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} w < \alpha$ и экспоненциально убывает на бесконечности с порядком $1/2 + \pi/(2\alpha)$.

Из равенства (11) следует, что функция $\Phi_1(w)$ аналитическая в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} w < \alpha$ и экспоненциально убывает на бесконечности. В случае, когда $\alpha > \beta$, функция $\Phi_1(w)$ в точке w_0 имеет полюс первого порядка. Таким образом, задача решена.

Теперь легко показать, что при $\alpha < \beta$ касательное напряжение $\tau_{\xi\eta}$ ограничено в точке $\xi = 0$; при $\alpha = \beta$ оно в этой точке имеет логарифмическую особенность; если же $\alpha > \beta$, то имеет место представление

$$\tau_{\xi\eta} = m\xi^{\tau_0/\alpha - 1} + \varphi_2(\xi),$$

где $m = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \lim_{\tau\to\tau_0} T(\tau)(\tau_0 - \tau)$, $\varphi_2(\xi)$ ограничена в окрестности точки $\xi = 0$.

Легко показать, что $1-\tau_0(\alpha)/\alpha$ — строго растущая положительна непрерывная функция в интервале $\beta<\alpha\leqslant 2\pi$ и имеют место равенств

$$\tau_0(\alpha)/\alpha = 1/2 \quad \text{при} \quad \alpha=\pi, \qquad \tau_0(\alpha)/\alpha = 1/4 \quad \text{при} \quad \alpha=2\pi.$$

Отметим, что рассмотренная задача в случае полуплоскости исследова лась в работах ([3], [4]) способом, отличным от приведенного в этой работе

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступил
23 X 197

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической упру гости, М.— Л., 1954. [2] Р. Д. Банцури, ДАН, 167, № 6, 1256 (1966). [3] А. И. Ка ландия, ПММ, 33, в. 3 (1969). [4] В. Л. Воробьев, Г. Я. Попов, ПММ, 34 в. 2 (1970).