

А. В. КУЗЬМИНЫХ

ИЗОПРОЕКЦИОННОЕ СВОЙСТВО СФЕРЫ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 19 IX 1972)

В 1969 г. А. Д. Александровым был поставлен вопрос о том, является ли тело, все ортогональные проекции которого конгруэнтны, шаром. Ответ на него дает приводимая ниже теорема.

Рассмотрим множество $A \subset E^3$ и образы $pe(A)$ при ортогональном проектировании p на плоскость $E^2 \subset E^3$ множеств $e(A)$ ($e \in \mathcal{E}(3)$), где $\mathcal{E}(n)$ — группа движений E^n . Будем говорить, что множество $M \subset E^2$ конгруэнтно множеству $M' \subset E^2$, если $\exists e \in \mathcal{E}(2)$ такое, что $M = e(M')$.

Теорема. Если $A \subset E^3$ — компакт такой, что $\forall e \in \mathcal{E}(3)$ $pe(A)$ конгруэнтно $p(A)$, то $A = S^2 \cup V$, где S^2 — сфера, а V — некоторое множество, лежащее внутри шара, ограниченного сферой S^2 .

Доказательство.

Лемма. Пусть $B \subset E^2$ — компакт. Тогда либо $\exists O' \in E^2$ и натуральное n такие, что B инвариантно относительно поворотов E^2 вокруг O' на углы $2k\pi/n$, $0 \leq k < n$, и только относительно этих движений E^2 , либо B есть объединение концентрических окружностей. (B инвариантно относительно $e \in \mathcal{E}(2)$, если $B = e(B)$.)

Доказательство следует из компактности группы движений E^2 , относительно которых компакт инвариантен.

Пусть $p(A)$ удовлетворяет первому заключению леммы. Будем считать, что плоскость проекций есть $\{(x, y, z): z = 0\} \subset E^3$.

Рассмотрим группу $SO(3)$ вращений E^3 около точки $O \in E^3$. Пусть $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ — репер в E^3 с началом в O такой, что $\forall i, i = 1, 2, 3$, $\|\bar{a}_i\| = \sup \|OM\| \{M \in A\}$. Метрика d_s в $SO(3)$ определяется следующим образом: $d_s(s_1, s_2) = \inf \|s_1(\bar{a}_i) - s_2(\bar{a}_i)\| \{i = 1, 2, 3\}$, где $s_1, s_2 \in SO(3)$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{K}$ компактов из E^2 с расстоянием $d(B, B') = \inf \rho\{(B, \rho) \supset B', (B', \rho) \supset B, \rho \geq 0\}$, где B, ρ — ρ -окрестность компакта B (т. е. объединение ρ -окрестностей всех его точек).

Пусть $F: SO(3) \rightarrow \mathcal{K}$ такое, что $F(s) = ps(A)$, $s \in SO(3)$. Легко видеть, что отображение F равномерно непрерывно.

По лемме, для $p(A)$ $\exists O_1 \in E^2$ и натуральное n такое, что $p(A)$ инвариантно только относительно поворотов E^2 вокруг O_1 на углы $2k\pi/n$, $0 \leq k < n$.

Пусть $U = \{(r, \varphi) \in E^2 | 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi/n\}$. Назовем n -звездой $Z^n(O', \varphi)$ с вершиной O' и углом φ объединение n лучей в E^2 с концами в точке O' таких, что угол между любой парой соседних из них равен $2\pi/n$, а угол между осью абсцисс и лучом $h(Z^n(O', \varphi)) \cap U$ равен φ , где h — сдвиг E^2 на вектор $\overline{O'O}$.

Для $s \in SO(3)$ рассмотрим произвольное движение $e_s \in \mathcal{E}(2)$ такое, что $ps(A) = e_s(p(A))$. Определим $\Phi: SO(3) \rightarrow E^2 \times S^1$ следующим образом: $\Phi(s) = (e_s(O_1), n\varphi_s)$, где φ_s — угол, соответствующий образу $Z^n(e_s(O_1), \varphi_s)$ n -звезды $Z^n(O_1, 0)$ при движении e_s . Отображение Φ задано корректно, т. е. $\forall e_s^{(1)}, e_s^{(2)} \in \mathcal{E}(2)$ таких, что $ps(A) = e_s^{(1)}(p(A))$, $i = 1, 2$, образы $\Phi(s)$, определенные посредством $e_s^{(1)}$ и $e_s^{(2)}$, совпадают. В самом деле, в про-

тивном случае $p(A)$ инвариантно относительно $(e_s^{(2)})^{-1} e_s^{(1)}$; следовательно, по лемме $(e_s^{(2)})^{-1} e_s^{(1)}$ есть поворот около O_1 на угол вида $2k\pi/n$, $0 \leq k < n$, т.е. $Z^n(O_1, 0)$ инвариантна относительно $(e_s^{(2)})^{-1} e_s^{(1)}$, что невозможно по предположению.

Для доказательства непрерывности Φ предположим противное и рассмотрим последовательность $\{s_k\}$, $s_k \in SO(3)$, такую, что $\lim s_k = s_0$, $s_0 \in SO(3)$, но $\lim \Phi(s_k) \neq \Phi(s_0)$.

Вследствие ограниченности $\bigcup_{s \in SO(3)} e_s(O_1)$ (это множество лежит в круге радиуса $\sup \|OM\| \{M \in A\} + \rho(p(A), O_1)$ с центром в O) и компактности S' существует подпоследовательность $\{\Phi(s_{k_i})\}$ последовательности $\{\Phi(s_k)\}$, сходящаяся к некоторому $(D_0', \varphi_0') \neq (D_0, \varphi_0) = \Phi(s_0)$.

Пусть $e_0, e_0' \in \mathcal{E}(2)$ таковы, что $Z^n(D_0, \varphi_0) = e_0(Z^n(O_1, 0))$ и $Z^n(D_0', \varphi_0') = e_0'(Z^n(O_1, 0))$. Следовательно, $e_0(p(A)) \neq e_0'(p(A))$ (ибо в противном случае $Z^n(O_1, 0)$ была бы инвариантна относительно $(e_0')^{-1} e_0$, т.е. имело бы место равенство $(D_0, \varphi_0) = (D_0', \varphi_0')$).

Пусть точка $G \in e_0(p(A))$ такова, что $G \in e_0'(p(A))$. Вследствие компактности $e_0'(p(A))$ имеем, что $\rho(G, e_0'(p(A))) = \rho_0 > 0$. Существует натуральное n_0 такое, что $\forall n_i > n_0 \quad e_0(p(A)) \subset (e_{n_i}(p(A)))$, $\rho_0/2$ и $e_{n_i}(p(A)) \subset (e_0(p(A)))$, $\rho_0/2$, где $e_{n_i} \in \mathcal{E}(2)$ таково, что $e_{n_i}(Z^n(O_1, 0)) = Z^n(O_{n_i}, \varphi_{n_i})$, где $(O_{n_i}, \varphi_{n_i}) = \Phi(s_{n_i})$. Следовательно, $\rho(G, e_0'(p(A))) < \rho_0$. Противоречие.

Аналогично получаем, что не существует точки $G' \in e_0'(p(A))$ такой, что $G' \notin e_0(p(A))$. Следовательно, $e_0(p(A)) = e_0'(p(A))$. Противоречие.

Пусть $s_\varphi \in SO(3)$ — вращения A вокруг оси $\{(x, y, z): x = 0, y = 0\}$ на углы φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$. Рассмотрим окружность $S_0^1 = \bigcup_{0 \leq \varphi < 2\pi} s_\varphi$. По определению отображения Φ имеем, что $\Phi|_{S_0^1}$ гомотопно отображению $\Phi_0: S_0^1 \rightarrow E^2 \times S^1$, где $\Phi_0(S_\varphi) = (0, n\varphi)$. Но $\pi_1(SO(3)) = Z_2$, $\pi_1(E^2 \times S^1) = Z$, а непрерывное отображение индуцирует гомоморфизм группы гомотопий. Так как единственной подгруппой группы Z , гомоморфной Z_2 , является нулевая группа, а Φ_0 не гомотопно 0 (так как $n \neq 0$), приходим к противоречию.

Следовательно, $p(A)$ удовлетворяет второму заключению леммы, из чего легко видеть, что $A = S^2 \cup V$, где V лежит внутри шара, ограниченного S^2 .

З а м е ч а н и е. Теорема остается справедливой, если определить конгруэнтность следующим образом. $M \subset E^2$ конгруэнтно $M' \subset E^2$, если существует изометрия $f: E^2 \rightarrow E^2$ такая, что $M = f(M')$.

С л е д с т в и е 1. Пусть $A \subset E^3$ — выпуклый компакт, для которого существует более чем одноточечное множество $B \subset E^2$ такое, что $\forall e \in \mathcal{E}(3)$ существует единственное подмножество B_e границы множества $pe(A)$, конгруэнтное B . Тогда A есть шар.

З а м е ч а н и е. Если не требовать $\forall e$ единственности множества B_e или не требовать, чтобы B_e принадлежало именно границе $pe(A)$, то следствие неверно. Условие выпуклости компакта A может быть заменено условием, что все проекции A гомеоморфны кругу и что из сходимости проекций следует сходимость их границ.

С л е д с т в и е 2. Пусть $B \subset E^2$ гомеоморфно кругу, но не является кругом. Пусть $A \subset E^3$ — компакт такой, что $\forall e \in \mathcal{E}(3) \quad \exists B_e$, конгруэнтное B и такое, что $B_e \supset pe(A)$. Тогда $\exists e_0 \in \mathcal{E}(3)$, для которого $\exists B_{e_0}'$, конгруэнтное B и неравное B_{e_0} , такое, что $B_{e_0}' \supset pe_0(A)$.

З а м е ч а н и е. Если не требовать компактности множества A , то теорема неверна.

П р и м е р 1. Существует $V \subset E^3$ такое, что $\forall e \in \mathcal{E}(3) \quad pe(A)$ есть открытый круг радиуса 1, а A гомеоморфно открытому кругу.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что если в условии теоремы 1 заменить

$\mathcal{E}(3)$ произвольным множеством, всюду плотным в $\mathcal{E}(3)$, то теорема остается справедливой. В связи с этим имеет место

Пример 2. Пусть U — счетное всюду плотное в $SO(3)$ множество. Существует $A \subset E^3$ такое, что $\forall e \in U \quad pe(A)$ — открытый круг радиуса 1, а A гомеоморфно интервалу $(0, 1)$.

Пример 3. Существует $A \subset E^3$ такое, что $\forall e \in \mathcal{E}(3) \quad pe(A)$ есть открытый круг радиуса 1, A связно, $A \setminus (0, 0, 0)$ вполне несвязно.

Пусть $J = \{(x, 0, 0) : x \text{ иррационально}\}$, $C = J \cup J + (\overline{0, 0, 1}) \cup J + (\sqrt{2}/4, 0, 2)$. Легко видеть, что для каждой прямой $L \subset \{(x, y, z) : y = 0\}$ такой, что $L \cap \{(x, 0, i) : \sqrt{2}/4 < x < 1 - \sqrt{2}/4\} \neq \emptyset$, $i = 0, 2$, имеем, что $L \cap C \neq \emptyset$.

Пусть $P_m = \{(0, r, m) : r \text{ рационально}, 0 < r < 1\}$, $m = 0, \dots, 8$, G — базис Гамеля для E^1 , лежащий в интервале $(0, \sqrt{2}/4)$.

Существует $g_0 \in G$ такой, что $\forall j_0, j_1, j_2, j_0 = 0, 1, 2; j_1 = 3, 4, 5; j_2 = 6, 7, 8$, $\forall$ прямой $L \subset \{(x, y, z) : x = 0\}$ такой, что $L \cap \{(0, y, p) : \sqrt{2}/4 < y < 1 - \sqrt{2}/4\} \neq \emptyset$, $p = 0, 8$, имеем, что хотя бы одно из пересечений $P_{j_0} \cap L, P_{j_1} \cap L, (P_{j_2} + (\overline{0, g_0, 0})) \cap L$ пусто.

В самом деле, в противном случае $\exists j'_0, j'_1, j'_2$ такие, что $\exists G' \subset G$ такое, что G' несчетно (так как несчетное множество не может быть представлено в виде объединения 27 счетных множеств) и $\forall g \in G' \quad \exists L_g \subset \{(x, y, z) : x = 0\}$, для которой $L_g \cap \{(0, y, p) : \sqrt{2}/4 < y < 1 - \sqrt{2}/4\} \neq \emptyset$, $p = 0, 8$, и все три пересечения непусты.

Пусть $P = \{(a^0, a^1) : a^h \in P_{j_h}, h = 0, 1\}$. Поставим в соответствие $g \in G'$ элемент $(a_g^0, a_g^1) \in P$ такой, что $L_g \ni a_g^h, h = 0, 1$. Это отображение $G' \rightarrow P$ инъективно (так как в противном случае $\exists g_1, g_2 \in G'$ такие, что $g_1 - g_2 = r_0$, где r_0 рационально), но P счетно. Противоречие.

Пусть $C_1 = C \times \{(0, y, 0) : y \text{ иррационально}, 0 < y < 1\}$,

$$C_2 = C_1 + (\overline{0, 0, 3}), \quad C_3 = C_2 + (\overline{0, g_0, 3}), \quad C' = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

Легко видеть, что каждая прямая L такая, что

$$L \cap \left\{ (x, y, p) : \frac{\sqrt{2}}{4} < x < 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} < y < 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} \neq \emptyset, \quad p = 0, 8,$$

пересекает множество C' .

Пусть K_1 — подмножество канторова множества K в отрезке $[0, 1/2]$, состоящее из точек, являющихся концами интервалов, удаленных при построении K . Пусть $K_2 = K \setminus K_1$. Пусть $Q_0(x)$ — отрезок $[(x, 0), (0, 1)]$, где $x \in K$, а $Q(x)$ — подмножество $Q_0(x)$, состоящее из точек с иррациональными ординатами, если $x \in K_1$, и состоящее из точек с рациональными ординатами, если $x \in K_2$.

Множество $Q = \bigcup_{x \in K} Q(x)$ связно, но $Q \setminus (0, 1)$ вполне несвязно (см. (1)).

Пусть $e \in \mathcal{E}(3)$ таково, что $e_0(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$, $e_0(0, 0, 0) = (0, -1, 0)$, $e_0(1/2, 0, 0) = (0, -1, -1/2)$. Пусть T — семейство трансляций E^3 такое, что $\bigcup_{t \in T} t(e_0(Q(0))) = C'$. Легко видеть, что существует непрерывное отображение $f: E^3 \rightarrow E^3$, тождественное на $\bigcup_{t \in T} t(e_0(Q) \cap \{(x, y, z) : x = 0, \sqrt{2}/3 \leq y < 1, z = 0\})$, являющееся гомеоморфизмом (на свой образ) на множестве $\bigcup_{t \in T} t(e_0(Q) \cap \{(x, y, z) : x = 0, 0 < y \leq \sqrt{2}/3, z = 0\})$ и такое, что $f(\bigcup_{t \in T} t(0, 0, 0)) = (0, 0, 0)$.

Множество $B = f(\bigcup_{t \in T} t e_0(Q))$ связно (так как является объединением связных множеств, пересечение которых есть $(0, 0, 0)$); $B \setminus (0, 0, 0)$

вполне несвязно (так как в противном случае либо существует компонента связности, содержащая точки b_1 и b_2 такие, что $f^{-1}(b_1)$ и $f^{-1}(b_2)$ лежат в разных плоскостях, параллельных $\{(x, y, z): x=0\}$ (тогда существует поверхность в E^3 , проходящая через $(0, 0, 0)$, разделяющая b_1 и b_2), либо существует компонента связности B' , содержащая две точки, причем $f^{-1}(B')$ лежит в плоскости, параллельной $\{(x, y, z): x=0\}$ (противоречие с вполне несвязностью $Q \setminus (0, 1)$)).

Назовем кирпичом образ множества B при гомеоморфизме φ таком, что $\varphi(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, а сужение φ на $\bigcup_{t \in T} t(e_0/Q) \cap \{(x, y, z): x=0, \sqrt{2}/3 < y < 1, z=0\}$ есть композиция сжатий к координатным плоскостям и трансляций E^3 . Множество

$$\varphi\left(\left(\bigcap_{t \in T} t(e_0(Q(0)))\right) \cap \left\{(x, y, z): \frac{\sqrt{2}}{4} < x < 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{3} < y < 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}\right)$$

будем называть ядром кирпича. Таким образом, всякая прямая, пересекающая верхнюю и нижнюю грани параллелепипеда, являющегося выпуклой оболочкой ядра кирпича, пересекает и само ядро.

Занумеруем множество пар (e, n) , где $e \in U$ (U — счетное всюду плотное в $SO(3)$ множество), n натуральное.

Для каждого натурального k $\exists \varepsilon_k > 0$ такое, что существует конечное множество трансляций $t_0^{(k)}, \dots, t_{n_k}^{(k)}$ пространства E^3 такое, что

$P\left(\bigcup_{i=0}^{n_k} t_i(\{(x, y, z): |x| < \varepsilon_k, |y| < \varepsilon_k, |z| < \varepsilon_k\})\right) \supset \{(x, y): x^2 + y^2 < (1 - 1/(k+1))^2\}$, причем $t_i(\{(x, y, z): |x| < \varepsilon_k, |y| < \varepsilon_k, |z| < \varepsilon_k\}) \cap t_j(\{(x, y, z): |x| < \varepsilon_k, |y| < \varepsilon_k, |z| < \varepsilon_k\}) = \emptyset$ при $i \neq j$. $\forall k$ строим кирпичи $B_1^{(k)}, \dots, B_{n_k}^{(k)}$ в шаре $\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 < (1 - 1/(k+2))^2\}$ так, что ядро $B_{i_k}^{(k)}$ есть $t_{i_k}^{(k)}(\{(x, y, z): |x| < \varepsilon_k, |y| < \varepsilon_k, |z| < \varepsilon_k\})$, $i_k = 0, \dots, n_k$, причем $e_k^{-1}B_{i_k}^{(k)} \cap e_l^{-1}B_j^{(l)} = (0, 0, 0)$, где e_k — первый элемент пары с номером k (натуральные k, l, i, j таковы, что $i < n_k, j < n_l, |k-l| + |i-j| \neq 0$). Легко

видеть, что $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{n_k} e_k^{-1}B_{i_k}^{(k)}$ искомое.

Замечание. Все рассмотренные примеры могут быть модифицированы таким образом, чтобы проекции множеств A представляли собой не круг, а плоскость E^2 .

Новосибирский государственный университет

Поступило
25 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ К. Куратовский, Топология, 2, М., 1969.