Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 517.537 **МАТЕМАТИКА**

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. НАГНИБИДА

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$

Через A_R, $0<R\leqslant\infty$, обозначим пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z|<R$ функций с обычной топологией (т. е. топологией компактной сходимости) (¹). Отметим далее, что вопросу полноты в пространствах A_R (а также и в других аналитических пространствах) систем функций вида $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ посвящена обширная литература (см., например, соответствующие работы А. О. Гельфонда, А. И. Маркушевича, И. И. Ибрагимова, Б. Я. Левина и других математиков). Вполне естественно, что во всех известных результатах о полноте таких систем существенно используются различные свойства последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$.

В этой заметке рассматривается вопрос о полноте в пространствах A_R системы $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ в предположении, что $f(z)$ — целая функция (т. е. $f(z)\in A_\infty$) порядка ρ и типа σ $(0<\rho,\ \sigma<\infty)$, а числа последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ исчерпывают все нули другой целой функции $g(z)$, порядок и тип которой обозначим соответственно через ρ_1 и σ_1 $(0<\rho_1,\ \sigma_1<\infty)$. Наша задача — нахождение различных соотношений между числами ρ, σ, ρ_1, σ_1, при которых $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ является полной или же неполной в A_R. Поэтому естественно, что в получаемых утверждениях свойства последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ фигурировать уже не должны.

Заметим вначале, что мы впредь будем требовать, чтобы все тейлоровские коэффициенты f_n функции $f(z)$ были отличными от нуля, поскольку это условие необходимо для полноты системы $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ в пространствах A_R. Кроме того, в некоторых случаях нам приходится предполагать также существование предела

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/\rho}|f_n|^{1/n}=(\sigma e\rho)^{1/\rho}. \qquad (*)$$

Положим $\gamma_n=g_n/f_n$, $n=0,1,\ldots$; здесь g_n — тейлоровские коэффициенты функции $g(z)$. Легко подсчитать, что при выполнении условия $(*)$ имеют место следующие равенства:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\gamma_n|^{1/n}=\begin{cases}0, & \rho_1<\rho,\\ (\sigma_1/\sigma)^{1/\rho}, & \rho_1=\rho.\end{cases}$$

Следовательно, с помощью последовательности $\{\gamma_n\}_{k=0}^{\infty}$ можно построить (²) линейный непрерывный в A_R (R — произвольное при $\rho_1<\rho$ и $R>(\sigma_1/\sigma)^{1/\rho}$ при $\rho_1=\rho$) функционал, аннулирующийся на всех функциях системы $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$. Поэтому мы легко убеждаемся в справедливости следующих двух утверждений.

Теорема 1. *Если $\rho_1<\rho$ и выполнено условие $(*)$, то система $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ не полна ни в одном из пространств A_R, $0<R\leqslant\infty$.*

Например, если условие $(*)$ выполняется для целой функции $f(z)$ первого порядка нормального типа, то система $\{f(n^2 z)\}_{k=0}^{\infty}$ не является полной ни в одном из пространств A_R, $0<R\leqslant\infty$ (в этом случае можно положить $g(z)=\dfrac{\sin\pi\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$).

Теорема 2. *Если $\rho_1 = \rho$ и выполнено условие* $(*)$, *то система* $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ *не полна ни в одном из пространств* A_R, *для которых* $R > (\sigma_1 / \sigma)^{1/\rho}$.

Замечание 1. Очевидно, что если $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ — нули целой функции $f(z)$, то система $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ также не может быть полной хотя бы в одном из пространств A_R с $R > 1$ ни при каких дополнительных условиях.

Замечание 2. Известно ([3]), что если $f(z)$ — целая функция первого порядка и типа σ, то система $\{f(nz)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в каждом A_R с $R \leqslant \pi / \sigma$. Полагая $g(z) = \sin \pi z$, мы убеждаемся в том, что при выполнении условия $(*)$ $R = \pi / \sigma$ является в то же время максимальным радиусом полноты рассматриваемой системы.

Как видно из теоремы 2, при $\rho_1 = \rho$ остается открытым вопрос о полноте системы $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ лишь в тех пространствах A_R, для которых $R \leqslant (\sigma_1 / \sigma)^{1/\rho}$, хотя кажется вполне вероятным, что ответ на него (по крайней мере для дробных ρ) должен быть положительным. В пользу этой гипотезы говорит, например, следующее утверждение (по этому поводу см. ([4]), стр. 284).

Теорема 3. (Б. Я. Левин). *Пусть последовательность* $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ *образует правильное множество, а* $g(z)$ *совпадает с его канонической функцией и имеет постоянный индикатор.*

Тогда система $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ *полна в каждом пространстве* A_R *с* $R \leqslant (\sigma_1 / \sigma)^{1/\rho}$.

Любопытным в связи с этой проблемой кажется и такой результат.

Теорема 4. *Если ρ — дробное число, $\rho_1 = \rho$ и $\sigma = 0$ (а $\sigma_1 \neq 0$), то система* $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ *полна в каждом пространстве* A_R, $0 < R \leqslant \infty$.

Доказательство. Пусть некоторый линейный непрерывный в пространстве A_R, $0 < R < \infty$, функционал аннулируется на всех функциях системы $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$. Это равносильно ([2]) существованию такой последовательности $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\gamma_n|^{1/n} = \gamma < R$, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \gamma_n \alpha_k^n = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Отсюда следует, что функция $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \gamma_n z^n$ целая, ее порядок $\tilde{\rho}$ либо меньше ρ, либо равен ρ, но тогда тип $\tilde{\sigma} \leqslant \sigma\gamma^\rho = 0 < \sigma_1$. Кроме того, $\varphi(\alpha_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Но так как ρ_1 — дробное число, порядок ρ_1 функции $g(z)$ совпадает с показателем τ сходимости ее нулей (([4]), стр. 39). Поэтому из очевидных соотношений $\tilde{\rho} \geqslant \tilde{\tau} \geqslant \tau = \rho_1 = \rho \geqslant \tilde{\rho}$, где $\tilde{\tau}$ — показатель сходимости нулей функции $\varphi(z)$, следует, что $\tilde{\rho} = \rho$ и, таким образом, $\tilde{\sigma} = 0$.

Предполагая, далее что $\varphi(z) \not\equiv 0$ (это условие равносильно неполноте системы $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$), рассмотрим целую функцию $h(z) = \varphi(z) / g(z)$, т. е. положим $\varphi(z) = g(z) \cdot h(z)$. Так как (([4]), стр. 27) верхняя плотность Δ_φ нулей функции $\varphi(z)$ подчинена условию $\Delta_\varphi \leqslant e^\rho \tilde{\sigma}$, то $\Delta_\varphi = 0$. Поэтому, учитывая очевидное неравенство $\Delta_g \leqslant \Delta_\varphi$, мы должны заключить, что также $\Delta_g = 0$ и тем самым (([4]), стр. 64) функция $g(z)$ должна иметь минимальный тип. Последнее же приводит к противоречию, поскольку $\sigma_1 > 0$. Теорема доказана.

Обратимся еще к случаю $\rho_1 > \rho$. Если ρ_1 — дробное, то при любом R, $\theta < R < \infty$, тождество $\varphi(z) \equiv 0$ (см. доказательство теоремы 4) сразу следует из соотношений $\tilde{\tau} \geqslant \tilde{\tau} = \rho_1 > \rho \geqslant \tilde{\rho}$. Следовательно, верна

Теорема 5. *Если ρ_1 — дробное число и $\rho_1 > \rho$, то система* $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ *полна в каждом пространстве* A_R, $0 < R \leqslant \infty$.

Что же касается случая $\rho_1 \geqslant \rho$ при целом ρ_1, то эта ситуация намного сложнее, и дать определенный ответ на вопрос о полноте системы

$\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ невозможно. Действительно, умножая функцию $g(z)$ на $\exp(p(z))$, где $p(z)$ — некоторый многочлен, мы получим новую целую функцию $\psi(z)$ с теми же нулями $\{\alpha_k\}_{k=0}$. Но порядок ρ_ψ функции $\psi(z)$ будет, вообще говоря, отличным от ρ_1. Поэтому, например, может случиться так, что хотя $\rho_1 \geqslant \rho$, но $\rho_\psi < \rho$, и система $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ не полна при выполнении условия (*) ни в одном из A_R, $0 < R \leqslant \infty$, или же ρ_ψ будет одновременно дробным и большим, чем ρ, а соответствующая система — полной в любом A_R, $0 < R \leqslant \infty$. Поэтому, не прибегая к помощи других величин, кроме ρ, σ, ρ_1 и σ_1, формулировать теоремы о полноте системы $\{f(\alpha_k z)\}_{k=0}^{\infty}$ в случае целого ρ_1 и $\rho_1 \geqslant \rho$ нельзя.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку
Черновицкий государственный
университет

Поступило
15 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Köthe, J. reine u. angew. Math., 191, 30 (1953). [2] А. И. Маркушевич, Матем. сборн., 17, № 2, 211 (1945). [3] А. О. Гельфонд, Матем. сборн., 4 (46), 1, 149 (1938). [4] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.