Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 4

УДК 512 + 519.4 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. ДУРНЕВ

ПОЗИТИВНАЯ ТЕОРИЯ СВОБОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 26 X 1972)

Формула узкого исчисления предикатов с равенством, имеющая предваренную дизъюнктивную нормальную форму без отрицаний, называется позитивной. В настоящей работе рассматриваются позитивные формулы на свободных полугруппах. Предполагается, что сигнатура содержит знак полугрупповой операции и множество образующих полугруппы, выделенных в качестве констант. Ю. И. Хмелевский ([1]) построил алгоритм, позволяющий для любой позитивной формулы Φ с константами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и с приставкой типа $\exists^3$ определить, истинна ли формула Φ на свободной полугруппе с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Основной результат настоящей работы составляет следующая

Теорема 1. *Не существует алгоритма, позволяющего для произвольной формулы Φ вида*

$$(\exists x_1)(\forall y)(\exists x_2x_3x_4)\left(\bigvee_{i=1}^{15} w_i = v_i\right),$$

где w_i, v_i — слова в алфавите $\{x_1, x_2, x_3, x_4, y, a_1, a_2, a_3\}$, определить, истинна ли формула Φ на свободной полугруппе с образующими a_1, a_2, a_3.

Знак $\doteq$ будет означать далее графическое равенство, знак $\rightleftharpoons$ равенство по определению; $G = \langle a_1, a_2;\ A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n\rangle$ — конечно-определенная полугруппа, заданная образующими a_1, a_2 и определяющими соотношениями $A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n$, и при любом i слова A_i, B_i непустые; $\Pi_m = \langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ — свободная полугруппа с образующими $a_1, \ldots, a_m$. Если V_1, V_2 — слова из Π_2, то $V_1 \overset{=}{_G} V_2$ означает, что V_1 равно V_2 в полугруппе G.

$$A_{n+j} \rightleftharpoons B_j, \quad B_{n+j} \rightleftharpoons A_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\mathfrak{A}_1(w, z, x_1, x_2, x_3) \rightleftharpoons \left(\left(\bigvee_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} (w = x_1a_ix_2 \,\&\, z = x_1a_jx_3)\right) \vee z = wx_1\right),$$

$$\mathfrak{A}(w, y, x_1, x_2, x_3, z) \rightleftharpoons \left(\mathfrak{A}_1(w, z, x_1, x_2, x_3) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{2} w = za_ix_1\right) \vee\right.$$

$$\left.\vee \left(\bigvee_{i=1}^{2n} w\,a_3ya_3 = za_3x_1A_ix_2a_3x_1B_ix_2a_3x_3\right)\right),$$

$$P_G(x, y) \rightleftharpoons (\exists x_0)(\forall z)(\exists x_1x_2x_3)\mathfrak{A}(a_3xa_3x_0, y, x_1, x_2, x_3, z).$$

Лемма 1. *Если V_1, V_2 — непустые графически неравные слова из Π_2, то $V_1 \overset{=}{_G} V_2$ тогда и только тогда, когда формула $P_G(V_1, V_2)$ истинна на полугруппе Π_3.*

Доказательство. Если W, Z — слова из Π_3 и W непусто, то формула $(\exists x_1x_2x_3)\mathfrak{A}_1(W, Z, x_1, x_2, x_3)$ истинна на полугруппе Π_3 тогда и только тогда, когда слово Z не является собственным началом слова W.

Пусть V_1, V_2 — непустые графически неравные слова из Π_2 и $V_1 \overset{=}{_G} V_2$. В полугруппе Π_2 существует такая последовательность слов $Y_0, Y_1, \ldots, Y_m$, что для любого i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, найдутся такое j и слова X_1, X_2, что $Y_i \doteq X_1A_jX_2$, $Y_{i+1} \doteq X_1B_jX_2$ (считаем, что $m \geqslant 3$), и $Y_0 \doteq V_1$, $Y_m \doteq V_2$.

Возьмем $X_0 \rightleftharpoons Y_1 a_3 Y_2 a_3 \ldots a_3 Y_{m-1}$. Покажем, что на полугруппе Π_3 истинна формула

$$(\forall z)(\exists x_1 x_2 x_3)\mathfrak{A}(a_3 V_1 a_3 X_0,\ V_2,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ z).$$

Пусть Z — произвольное слово из Π_3. Если на Π_3 формула

$$(\exists x_1 x_2 x_3)\left(\mathfrak{A}_1(a_3 V_1 a_3 X_0, Z, x_1, x_2, x_3) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{2} a_3 V_1 a_3 X_0 = Z a_i x_1\right)\right)$$

ложна, то найдется такое Y, что $a_3 V_1 a_3 X_0 \doteq Z a_3 Y$, такие числа t, j слова X_1, X_2, X_3, что $a_3 V_1 a_3 X_0 a_3 V_2 a_3 \doteq Z a_3 Y_t a_3 Y_{t+1} a_3 X_3$ и $Y_t \doteq X_1 A_j X_2$, $Y_{t+1} \doteq X_1 B_j X_2$. Поэтому на Π_3 истинна формула

$$(\exists x_1 x_2 x_3)\mathfrak{A}(a_3 V_1 a_3 X_0,\ V_2,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ Z).$$

Так как Z — произвольное слово из Π_3, то на Π_3 истинна формула $P_G(V_1, V_2)$. Обратно, если V_1, V_2 — такие непустые слова, что формула $P_G(V_1, V_2)$ истинна на Π_3, то нетрудно показать, что в полугруппе Π_2 найдутся такие непустые слова $Z_1, \ldots, Z_m$, $m \geqslant 3$, что $a_3 V_1 a_3 X_0 a_3 V_2 a_3 \doteq a_3 Z_m a_3 Z_{m-1} a_3 \ldots a_3 Z_1 a_3$ и $Z_m \doteq V_1$, $Z_1 \doteq V_2$. Пусть при любом i, удовлетворяющем неравенствам $1 \leqslant i < t \leqslant m$, $Z_i \overline{\overline{{}_G}} Z_1$; покажем, что тогда $Z_t \overline{\overline{{}_G}} Z_1$. Возьмем $Z \rightleftharpoons a_3 Z_m a_3 \ldots a_3 Z_{t+1}$ при $m > t$ и Z — пустое слово при $m = t$. Тогда $a_3 V_1 a_3 X_0 \doteq Z a_3 Y$ при некотором Y, поэтому формула

$$(\exists x_1 x_2 x_3)\left(\mathfrak{A}_1(a_3 V_1 a_3 X_0, Z, x_1, x_2, x_3) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{2} a_3 V_1 a_3 X_0 = Z a_i x_1\right)\right)$$

ложна на Π_3, значит, найдутся такие слова X_1, X_2, X_3 и число i, что

$$a_3 V_1 a_3 X_0 a_3 V_2 a_3 \doteq Z a_3 X_1 A_i X_2 a_3 X_1 B_i X_2 a_3 X_3.$$

1) Если в слова X_1, X_2 не входит буква a_3, то $Z_t \doteq X_1 A_i X_2$, $Z_{t-1} \doteq X_1 B_i X_2$, тогда $Z_t \overline{\overline{{}_G}} Z_{t-1}$, а так как $Z_{t-1} \overline{\overline{{}_G}} Z_1$, то $Z_t \overline{\overline{{}_G}} Z_1$.

2) Если в X_1 входит буква a_3, то найдется $l < t$ такое, что $Z_t \doteq Z_l$ и опять $Z_t \overline{\overline{{}_G}} Z_1$.

3) Если в X_1 не входит буква a_3, но $X_2 \doteq X_л a_3 X_п$ и в $X_л$ не входит a_3, то найдется $l < t$ такое, что $Z_t \doteq X_1 A_i X_л$, $Z_l \doteq X_1 B_i X_л$ и опять $Z_t \overline{\overline{{}_G}} Z_1$. Лемма 1 доказана.

Взяв в качестве G конечно-определенную полугруппу с тремя определяющими соотношениями с неразрешимой проблемой тождества, получим доказательство теоремы 1.

Символ $(\forall z < w)$ означает «для каждого z, являющегося собственным началом $w, \ldots$».

$$\mathfrak{B}(w, z, x_0, x_1, x_2, x_3, x, y) \rightleftharpoons \left(w = a_3 x a_3 x_0 \,\&\, \left(\left(\bigvee_{i=1}^{2} w = z a_i x_1\right) \vee \right.\right.$$

$$\left.\left.\vee \left(\bigvee_{i=1}^{2n} w a_3 y a_3 = z a_3 x_1 A_i x_2 a_3 x_1 B_i x_2 a_3 x_3\right)\right)\right),$$

$$P_G^1(x, y) \rightleftharpoons (\exists w)(\forall z < w)(\exists x_0 x_1 x_2 x_3)\mathfrak{B}(w, z, x_0, x_1, x_2, x_3, x, y).$$

Лемма 2. *Если V_1, V_2 — непустые графически неравные слова из* Π_2, *то $V_1 \overline{\overline{{}_G}} V_2$ тогда и только тогда, когда $P_G^1(V_1, V_2)$ истинна на полугруппе* Π_3.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Если X — слово из Π_3, то $\partial(X)$ — длина слова X, $\varphi(X, i)$ (при $0 \leqslant i \leqslant \partial(X)$) — начало длины i слова X.

Теорема 2. *Не существует алгоритма, позволяющего для произвольной дизъюнкции уравнений $\Psi(w, z, x_1, x_2, x_3, x_4)$ вида $\Psi(w, z, x_1, x_2, x_3, x_4) \doteq (\bigvee_{i=1}^{8} w_i = v_i)$, где w_i, v_i — слова в алфавите $\{w, z, x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2, a_3\}$, определить, существует ли такое слово W в* Π_3, *что система дизъ-*

юнкций уравнений

$$\Psi(W,\ \varphi(W,\ 0),\ x_{01}, \ldots, x_{04}),$$
$$\Psi(W,\ \varphi(W,\ 1),\ x_{11}, \ldots, x_{14}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Psi(W,\ \varphi(W,\ l),\ x_{l1}, \ldots, x_{l4}),$$

где $l = \partial(W) - 1$, *имеет решение* $x_{01}, \ldots, x_{l4}$ *в* Π_3.

Доказательство сразу получается из леммы 2, если взять G с неразрешимой проблемой тождества.

Π_3^* — свободная полугруппа без пустого слова с образующими a_1, a_2, a_3.

Теорема 3. *Не существует алгоритма, позволяющего для произвольной позитивной формулы без констант* Φ *с приставкой типа* $\exists^4 \forall \exists^7$ *определить, истинна ли* Φ *на* Π_3^*.

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 1. Интересно отметить, что для позитивных формул без констант с приставками типа $\exists^m\forall$; $\forall\exists^m$, где m — любое натуральное число, существует алгоритм, решающий вопрос об истинности этих формул на полугруппе Π_3^*.

Теорема 4. *При* $m > n$ *существует алгоритм* $\mathfrak{A}_{m,n}$, *который по произвольной формуле* $\Phi(x_1, \ldots, x_t)$ *с единственными свободными переменными* $x_1, \ldots, x_t$ *и с константами* $a_1, \ldots, a_m$ *строит позитивную формулу* $\mathfrak{A}_{m,n}(\Phi)(x_1, \ldots, x_t)$ *с теми же самыми свободными переменными* $x_1, \ldots, x_t$ *и с константами* $a_1, \ldots, a_n$ *такую, что для произвольных слов* $X_1, \ldots, X_t$ *из* Π_m: *формула* $\Phi(X_1, \ldots, X_t)$ *истинна на* Π_m *тогда и только тогда, когда формула* $\mathfrak{A}_{m,n}(\Phi)(\varphi X_1, \ldots, \varphi X_t)$ *истинна на* Π_n, *где* φ — *вложение полугруппы* Π_m *в полугруппу* Π_2, *при котором* $\varphi a_i \rightleftharpoons a_2 a_1^i a_2$.

При любом $n \geqslant 2$ и любом m можно построить такую позитивную формулу $F(x;\ v_1, \ldots, v_m)$ с константами $a_1, \ldots, a_n$ и со свободными переменными x, $v_1, \ldots, v_m$, что для произвольных непустых слов $V_1, \ldots, V_m$ полугруппы Π_n: слово X полугруппы Π_n принадлежит подполугруппе полугруппы Π_n, порожденной словами $V_1, \ldots, V_m$ тогда и только тогда, когда формула $F(\varphi X;\ \varphi V_1, \ldots, \varphi V_m)$ истинна на полугруппе Π_n.

В позитивной теории полугруппы Π_2 выразимы следующие свойства конечно определенной полугруппы: «быть конечной», «быть хопфовой», «быть простой группой», для пары конечно определенных полугрупп: «быть изоморфными полугруппами».

Тульский педагогический институт
им. Л. Н. Толстого

Поступило
24 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. И. Хмелевский, Уравнения в свободной полугруппе. Тр. матем. инст. АН СССР, **107** (1971).