Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

А. В. ПОКРОВСКИЙ

К ТЕОРИИ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 22 V 1972)

Проблема математического описания гистерезисных нелинейностей уже давно привлекает внимание исследователей (см., например, ([1–19])). Задача осложнена тем, что один и тот же термин «гистерезисная нелинейность» применяют при изучении разных явлений. В последние годы М. А. Красносельский и группа его учеников последовательно развивают точку зрения, при которой гистерезисная нелинейность трактуется как специальный нелинейный оператор, определенный и непрерывный на некотором функциональном банаховом пространстве. Основная идея М. А. Красносельского заключается в том, что феноменологическая модель рассматриваемого явления определяет закон отыскания выходных сигналов при входных сигналах, образующих какой-либо класс простых функций (наиболее часто для кусочно-монотонных функций); если феноменологическая модель «разумна», то рассматриваемое соответствие между входным и выходным сигналами определяется фиксированным нелинейным оператором в естественном пространстве входных сигналов. Указанный оператор (оператор-гистерал) должен обладать свойством непрерывности.

В ([19]) исследованы широкие классы статических гистерезисных нелинейностей, определяющих гистералы в пространстве непрерывных функций; приведенная там теорема идентификации полностью описывает эти классы.

В настоящей работе автор предпринимает попытку описать классы гистерезисных нелинейностей, которые порождают непрерывные гистералы в пространстве S абсолютно непрерывных функций.

1. Пусть Ω — такое связное множество в плоскости $\{u, x\}$, что при любом u_0 его пересечение $\omega(u_0)$ с прямой $u = u_0$ непусто и является промежутком. Пусть каждым t_0, $x_0 \in (-\infty, \infty)$ соответствует оператор $W[t_0, x_0]$, определенный на кусочно-монотонных управлениях $u(t)$, $t \geqslant t_0$, удовлетворяющих условию $\{u(t_0), x_0\} \in \Omega$, значениями которого являются непрерывные функции $x(t)$, $t \geqslant t_0$, причем $x(t_0) = x_0$ и $\{u(t), x(t)\} \in \Omega$, $t \geqslant t_0$.

Пару, состоящую из множества Ω и семейства операторов $W[t_0, x_0]$, будем называть **гистероном**, если операторы $W[t_0, x_0]$ обладают полугрупповым свойством: для любого кусочно-монотонного управления $u(t)$

$$W[t_0, x_0]u(t) = W[t_1, W[t_0, x_0]u(t_1)]u(t), \quad t_0 \leqslant t_1 \leqslant t.$$

Приведенное определение гистерона эквивалентно определению из ([19]).

Ниже предполагается, что операторы $W[t_0, x_0]$ вольтерровы, т. е. значение функции $W[t_0, x_0]u(t)$ на каждом конечном промежутке $[t_0, t_1]$ определяется лишь значениями управления $u(t)$ на том же промежутке. Легко видеть, что участвующие в построениях работы ([19]) операторы $W[t_0, x_0]$ всегда вольтерровы.

Ниже через $S[t_0, T]$ обозначается пространство абсолютно непрерывных на $[t_0, T]$ функций $y(t)$ с нормой

$$\|y(t)\| = |y(t_0)| + \int_{t_0}^{T} |y'(\tau)|\,d\tau.$$

2. Пусть промежутки $\omega(u)$ конечны и замкнуты, причем их верхние и нижние концы образуют графики абсолютно непрерывных на каждом конечном промежутке функций $\gamma_+(u)$ и $\gamma_-(u)$. Будем считать, что на внутренних точках промежутков $\omega(u)$ определены две измеримые по u и непрерывные по x функции $\varphi_l(u, x)$ и $\varphi_r(u, x)$, ограниченные на каждом ограниченном множестве. Введем в рассмотрение определенную при почти всех u, всех x и при $k=-1, 0, 1$ функцию $f(u, x, k)$ при помощи равенств

$$f(u,x,-1)=\begin{cases}\min\left\{\frac{d}{du}\gamma_-(u), \varphi_l[u, \gamma_-(u)]\right\} & \text{при } x\leqslant\gamma_-(u),\\ \varphi_l(u,x) & \text{при } \gamma_-(u)<x<\gamma_+(u),\\ \max\left\{\frac{d}{du}\gamma_+(u), \varphi_l[u, \gamma_+(u)]\right\} & \text{при } x\geqslant\gamma_+(u);\end{cases}$$

$$f(u, x, 0)\equiv 0;$$

$$f(u,x,1)=\begin{cases}\max\left\{\frac{d}{du}\gamma_-(u), \varphi_r[u, \gamma_-(u)]\right\} & \text{при } x\leqslant\gamma_-(u),\\ \varphi_r(u,x) & \text{при } \gamma_-(u)<x<\gamma_+(u),\\ \min\left\{\frac{d}{du}\gamma_+(u), \varphi_r[u, \gamma_+(u)]\right\} & \text{при } x\geqslant\gamma_+(u).\end{cases}$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f[u(\tau), x(\tau), \operatorname{sign} u'(\tau)]\, u'(\tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Будем говорить, что функции $\varphi_l(u, x)$, и $\varphi_r(u, x)$ образуют правильную пару, если они удовлетворяют следующим односторонним условиям Липшица: при $x, y\in\omega(u)$, $|u|\leqslant N$

$$(x-y)[\varphi_l(u, x)-\varphi_l(u, y)]\geqslant -L(N)(x-y)^2, \tag{2}$$

$$(x-y)[\varphi_r(u, x)-\varphi_r(u, y)]\leqslant L(N)(x-y)^2. \tag{3}$$

Если $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant T$,— абсолютно непрерывная функция, то из принципа сжатых отображений (и несложных дополнительных построений) вытекает, что при выполнении условий (2) и (3) интегральное уравнение (1) имеет единственное определенное при $t\in[t_0, T]$ решение $x(t)$, которое мы обозначим через

$$x(t)=W[t_0, x_0]u(t). \tag{4}$$

Пара, состоящая из области Ω и операторов (4), является гистероном.

Отметим, что оператор $W[t_0, x_0]$ можно определить при более слабых ограничениях, чем (2) и (3) (например, можно было бы воспользоваться односторонними условиями Осгуда).

Обозначим через $\mathfrak{M}(t_0, t_1; x_0)$ множество определенных на $[t_0, t_1]$ абсолютно непрерывных функций $u(t)$, удовлетворяющих условию $x_0\in\omega[u(t_0)]$. Очевидно, $\mathfrak{M}(t_0, t_1; x_0)\subset S[t_0, t_1]$.

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi_l(u, x)$ и $\varphi_r(u, x)$ образуют правильную пару. Пусть функции $\gamma_-(u)$ и $\gamma_+(u)$ удовлетворяют на каждом конечном промежутке условию Липшица.*

Тогда оператор $W[t_0, x_0]$ непрерывен на $\mathfrak{M}(t_0, t_1; x_0)$ как оператор, действующий в пространстве $S[t_0, t_1]$.

При конструировании гистерона, изученного в теореме 1, мы определяли значения операторов $W[t_0, x_0]$ как решения уравнения (1). Значения этих операторов на гладких кусочно-монотонных управлениях можно определять непосредственным геометрическим описанием, как это обычно делается механиками и физиками (см., например, ([11], [12])). Если воспользоваться таким геометрическим описанием, то теорема 1 будет означать, что определенные на кусочно-монотонных и гладких управлениях операторы $W[t_0, x_0]$ допускают продолжение по непрерывности в смысле метрик пространств $S[t_0, t_1]$.

Теорема 1 означает, что выходной сигнал $x(t)$ мало меняется, если на управление $u(t)$ накладывается шум, малый по норме пространств $S[t_0, t_1]$; следует подчеркнуть, что в общем случае выходной сигнал изменится значительно, если известна лишь малость шума по амплитуде.

Рассмотрим два предельных случая теоремы 1.

Если $\gamma_-(u) \equiv \gamma_+(u) \equiv \gamma(u)$, то оператор (4) превращается в обычный оператор суперпозиции

$$Wu(t) = \gamma[u(t)]. \tag{5}$$

Из теоремы 1 следует, что оператор (5) непрерывен в $S[t_0, t_1]$, если он действует в этом пространстве или, что то же, если $\gamma(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Этот факт, возможно, не отмечался, хотя теории оператора суперпозиции посвящена значительная литература (см., например, ([20])). Полученный результат аналогичен известной теореме М. А. Красносельского, которая гласит, что оператор суперпозиции непрерывен в пространстве L_p, если он действует в этом пространстве.

Второй крайний случай возникает, когда Ω совпадает со всей плоскостью. В этом случае решения уравнения (1) совпадают с решениями дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi_l(u, x) + \varphi_r(u, x)}{2}\frac{du}{dt} + \frac{\varphi_l(u, x) - \varphi_r(u, x)}{2}\left|\frac{du}{dt}\right| \tag{6}$$

(ср. ([10])). Отметим, что решения уравнения (6), как и решения уравнения (1), определены при почти всех значениях t. Как мне сообщил М. А. Красносельский, в выступлении на одном из семинаров А. Ф. Филиппов указал, что для анализа зависимости решений уравнения (6) от управления $u(t)$ в пространстве $S[t_0, t_1]$ можно применять специальные теоремы из ([21]) о непрерывной зависимости решений от параметра. Подчеркнем, что в условиях теоремы 1 применение такого аппарата затруднено наличием у функции $f(u, x, k)$ разрывов по x.

3. В этом пункте обсуждается вопрос об условиях, при которых операторы $W[t_0, x_0]$ удовлетворяют условию Липшица.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть функции* $\varphi_l(u, x)$ *и* $\varphi_r(u, x)$ *удовлетворяют по переменной* x *локальному условию Липшица.*

Тогда операторы $W[t_0, x_0]$ *удовлетворяют на каждом множестве* $\mathfrak{M}(t_0, t_1; x_0)$ *условию Липшица как операторы, действующие из пространства* $S[t_0, t_1]$ *в пространство непрерывных функций* $C[t_0, t_1]$.

Ситуация усложняется, если рассматривать операторы $W[t_0, x_0]$ как операторы в пространствах $S[t_0, t_1]$; примеры показывают, что $W[t_0, x_0]$ может не удовлетворять условию Липшица даже в тех случаях, когда все четыре функции $\gamma_-(u)$, $\gamma_+(u)$, $\varphi_l(u, x)$, $\varphi_r(u, x)$ «хорошие». Мы сформулируем лишь две простейших теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *причем функции* $\gamma_-(u)$, $\gamma_+(u)$, $\varphi_l(u, x)$, $\varphi_r(u, x)$ *не зависят от* u.

Тогда операторы $W[t_0, x_0]$ *удовлетворяют условию Липшица на каждом ограниченном подмножестве множества* $\mathfrak{M}(t_0, t_1, x_0)$ *как операторы из* $S[t_0, t_1]$ *в* $S[t_0, t_1]$.

Теорема 4. *Пусть при всех* $u \in (-\infty, \infty)$ *выполнено неравенство* $\gamma_-(u) < \gamma_+(u)$. *Пусть производные* $\gamma_-'(u)$ *и* $\gamma_+'(u)$ *удовлетворяют локальному условию Липшица. Пусть, наконец, функции* $\varphi_l(u, x)$ *и* $\varphi_r(u, x)$ *удовлетворяют локальному условию Липшица по совокупности переменных* u *и* x.

Тогда операторы $W[t_0, x_0]$, *рассматриваемые как операторы из* $S[t_0, t_1]$ *в* $S[t_0, t_1]$, *удовлетворяют условию Липшица на каждой ограниченной части своей области определения.*

Отметим, что как теорема 3, так и теорема 4 охватывают гистерезисную нелинейность, возникающую в модели Прагера — Ишлинского упругопластического тела (см. ([14–17])).

4. При доказательстве приведенных выше теорем автор использовал ряд свойств семейств абсолютно непрерывных функций. Приведем формулировку одного полученного результата.

Теорема 5. *Пусть последовательность заданных на* $[0,1]$ *функций* $x_n(t)$ *сходится в* $S[0,1]$ *к функции* $x_*(t) \in S[0,1]$. *Пусть* E — *любое измеримое подмножество вещественной оси.*

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{F_n} [\,|x_n(\tau)| + |x_*(\tau)|\,]\, d\tau = 0,$$

где F_n — *симметрическая разность прообразов множества* E *относительно функций* $x_n(t)$ *и* $x_*(t)$.

5. Автор благодарен М. А. Красносельскому за множество ценных советов.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
4 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Volterra, J. Math. pures et appl., 1, 249 (1928). [2] E. Volterra, J. Appl. Mech., 17, 363 (1950). [3] T. K. Caughey, ibid., 27, 640 (1960). [4] T. Vogel, Theorie des sistemes evolutifs, 1965. [5] W. D. Iwan, J. Appl. Mech., 33, 893 (1966). [6] R. Bouc, Influence du cycle d'hysteresis sur la resonance nonlineaire d'un circuit serie, Colloque Intern. du C. N. R. S., 148, September, 1964. [7] C. H. Hagashi, J. Franklin Inst., 281, 378 (1966). [8] R. Bouc, Modele mathematique d'hysteresis, Application aux systemes a un degre de liberte, These, Mars, 1969, Marseille. [9] Р. Бу, Тр. V междунаpодн. конфер. по нелинейным колебаниям, 4, Киев, 1970, стр. 100. [10] А. А. Березовский, Л. П. Нижник, там же, стр. 68. [11] А. В. Нетушил, там же, стр. 393. [12] Б. Янкович, там же, стр. 503. [13] W. Prager, J. Appl. Mech., 23, 493 (1956). [14] J. F. Besseling, ibid., 25, 529 (1958). [15] А. Ю. Ишлинский, Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 583 (1944). [16] А. Ю. Ишлинский, Укр. матем. журн., 6, № 3, 314 (1954). [17] М. А. Красносельский, Б. М. Даринский и др., ДАН, 190, № 1, 29 (1970). [18] М. А. Красносельский, А. В. Покровский, ДАН, 195, № 3, 544 (1970). [19] В. С. Козякин, М. А. Красносельский, ДАН, 206, № 4 (1972). [20] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др., Интегральные уравнения в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966. [21] М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, УМН, 10, в. 3 (65), 147 (1955).