Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 512.7 *МАТЕМАТИКА*

А. В. РОМАНОВСКИЙ

ХАРАКТЕРЫ И НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком В. М. Глушковым 23 X 1972)

1. В статье приводятся критерии существования холловской нормальной подгруппы конечной группы G, выраженные в терминах степеней комплексных характеров G.

Теорему 1 следует рассматривать в связи с теоремой Ито (2) и теоремой Е 6.1 Айзакса и Пассмана из (3). Избавление от условия модулярности для силовской 2-подгруппы в теореме 1 привело бы к обобщению этих двух теорем.

Существуют не p-замкнутые группы, все собственные подгруппы которых p-замкнуты, например, $PSL(2,5)$ и группы типа S (1). Теорема 2 показывает, что для того, чтобы группа с абелевой силовской p-подгруппой, у которой все собственные подгруппы p-замкнуты, была сама p-замкнутой, достаточно, чтобы хотя бы один ее нелинейный неприводимый характер имел степень, не привышающую определенную границу. Можно убедиться, что такое утверждение не справедливо для групп типа S.

Теоремой 4 дополняются результаты, полученные ранее автором в (4, 5).

2. Приведем необходимые обозначения и определения: G — конечная группа порядка $|G|$; p — простое число; π — некоторое множество простых чисел; S_π-подгруппой группы G называется π-подгруппа G, индекс которой в G не делится ни па одно число из π.

Информацию о p-разрешимых группах, впервые введенных в рассмотрение в 1947 г. С. А. Чунихиным, можно получить из его книги (1).

Понятие модулярной группы можно найти в (6). Там же доказано, что p-группа модулярна тогда и только тогда, когда любые ее две подгруппы перестановочны. Дедекиндова группа, т. е. группа, у которой все подгруппы инвариантны, является модулярной, в частности, абелева группа модулярна.

Степенью характера χ группы G является натуральное число $\chi(1)$. Группа G называется p-замкнутой, если она обладает нормальной силовской p-подгруппой.

3. Теорема 1. *Пусть силовская 2-подгруппа группы G является модулярной. Для того чтобы силовская p-подгруппа G была абелевой и инвариантной в G, необходимо и достаточно, чтобы степень любого неприводимого характера G не делилась на p.*

Следствие 1. *Пусть силовская 2-подгруппа группы G является модулярной. Для того чтобы G имела абелеву нормальную S_π-подгруппу, необходимо и достаточно, чтобы степень любого неприводимого характера G не делилась ни на одно число из π.*

Следствие 2. *Если силовская 2-подгруппа P группы G является модулярной и степень любого неприводимого характера G является нечетным числом, тогда P абелева и инвариантна в G.*

4. Теорема 2. *Пусть группа G с абелевой силовской p-подгруппой G_p не является группой типа S, и пусть все собственные подгруппы G p-замкнуты. Если степень некоторого нелинейного неприводимого харак-*

тера G не больше $\sqrt{|C_p|}-1$, *тогда силовская p-подгруппа из G является инвариантной в G.*

Теорема 3. *Пусть G есть p-разрешимая группа с абелевой силовской p-подгруппой. G тогда и только тогда p-замкнута, когда все ее подгруппы типа S p-замкнуты.*

5. Теорема 4. *Пусть холловская нильпотентная подгруппа H группы G содержится прямым множителем в некоторой максимальной подгруппе M из G и имеет не инвариантную в G силовскую p-подгруппу. Если p делит степень каждого нелинейного неприводимого характера G, то тогда G имеет инвариантное дополнение к H.*

Гомельский государственный университет

Поступило 3 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, Подгруппы конечных групп, Минск, 1964. [2] N. Ito, Nagoya Math. J., 2, 17 (1951). [3] I. M. Isaacs, D. S. Passman, Pacif. J. Math., 15, № 3, 877 (1965). [4] А. В. Романовский, Сборн. Конечные группы, Минск, 1966, стр. 98. [5] А. В. Романовский, Докл. АН БССР, 16, № 8, 684 (1972). [6] М. Судзуки, Строение группы и строение структуры ее подгрупп, ИЛ, 1960.