Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 519.311

МАТЕМАТИКА

Э. Р. СМОЛЬЯКОВ

ПОНЯТИЕ РЕШЕНИЯ КОАЛИЦИОННОЙ ИГРЫ N ЛИЦ С ТРАНСФЕРАБЕЛЬНОСТЬЮ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 27 IX 1972)

Пусть имеется N игроков и N произвольных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_N$, на прямом произведении $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, которых определены N ограниченных функций $f_1(x), \ldots, f_N(x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Каждый i-й игрок стремится обеспечить $\sup f_i(x)$. Игроки могут объединяться в любые коалиции, но ни один из них не может участвовать одновременно в двух и более коалициях. Через P_k обозначим коалицию из k игроков. Суммарный выигрыш коалиции $f_{P_k} = \sum\limits_{i \in P_k} f_i$ может быть разделен между игроками произвольным образом. Обозначим через $\varphi^1(x_1), \ldots, \varphi^N(x_N)$ стратегии игроков $1, 2, \ldots, N$ соответственно, принадлежащие некоторому классу Φ (например, классу конечно-аддитивных нормированных мер), а через $\varphi_{P_k} = \{\overset{1}{\varphi}_{P_k}, \ldots, \overset{k}{\varphi}_{P_k}\}$ — стратегию коалиции P_k. Пусть $J_{P_k}(\varphi^1, \ldots, \varphi^N)$ представляет собой осредненное по мере $\varphi = \prod\limits_{i=1}^{N} \varphi^i$ значение функции f_{P_k}, когда игроки применяют стратегии $\varphi^1(x_1), \ldots, \varphi^N(x_N)$.

Назовем стратегию φ_{P_k} **оптимальной гарантирующей стратегией коалиции** P_k, если

$$\inf_{\bar\varphi_{P_N - P_k}} J_{P_k}(\varphi_{P_k}, \bar\varphi_{P_N - P_k}) = \sup_{\bar\varphi_{P_k}} \inf_{\bar\varphi_{P_N - P_k}} J_{P_k}(\bar\varphi_{P_k}, \bar\varphi_{P_N - P_k}). \qquad (1)$$

Если равенство (1) в доступном игрокам классе Φ не имеет места, можно ограничиться ε-оптимальными стратегиями φ_{P_k}, которые мы условимся также называть **гарантирующими**, а соответствующую верхнюю грань платы J_{P_k} — **ε-гарантированным доходом**.

Следуя [1–3], функцию

$$v(P_k) = \sup_{\bar\varphi_{P_k}} \inf_{\bar\varphi_{P_N - P_k}} J_{P_k}(\bar\varphi_{P_k}, \bar\varphi_{P_N - P_k}) \qquad (2)$$

назовем **характеристической функцией игры**. Функция $v(P_k)$ определена на множестве $\mathscr{P}(N)$ всех возможных коалиций P_k. В [1, 2] показано, что $v(P_k)$ — нормированная супер-аддитивная функция, т. е.

$$v(\varnothing) = 0; \; v(P_k \cup P_i) \geqslant v(P_k) + v(P_i), \text{ если } P_k \cap P_i = \varnothing. \qquad (3)$$

Каждый k-й игрок, действуя самостоятельно, с любой точностью гарантирует себе величину

$$v(k) = \sup_{\bar\varphi^k} \inf_{\bar\varphi_{P_N - P_1}} J_k(\bar\varphi_k, \bar\varphi_{P_N - P_1}). \qquad (4)$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{N} v(k) = v(P_N)$, игра называется **несущественной** [1–3]; в этом случае игрокам нет смысла образовывать коалиции, так как в составе ни одной из коалиций они не смогут гарантировать себе выигрыш больший, чем $v(k)$. Решение несущественной игры вполне определяется условиями (4) [1,2]. Определим понятие решения в существенной игре, т. е. в игре, в которой $\sum_{k=1}^{N} v(k) < v(P_N)$. Рассмотрим функцию

$$\pi(P_k) = \frac{1}{k}\Big[v(P_k) - \sum_{i \in P_k} v(i)\Big] \equiv \frac{1}{k}\Delta v(P_k). \tag{5}$$

Лемма 1. *Функция π обладает следующими свойствами:*

1) $\pi \geqslant 0$;

2) $\pi(k) = 0, k = 1, \ldots, N$.

Свойства 1), 2) следуют из определения функции π и из свойств функции v.

Лемма 2. *Функция $\pi(P_k)$ определена, ограничена и достигает максимума на множестве коалиций.*

Действительно, ограниченность ее есть следствие ограниченности функций f_i, $i = 1, \ldots, N$, а последнее утверждение следует из того, что множество значений функции π конечно.

Если через $\varepsilon_i(P_k)$ обозначить долю i-го игрока от полного гарантированного дохода $v(P_k)$ коалиции P_k, то трансферабельность игры означает, что всегда можно так разделить $\Delta v(P_k)$, что

$$\varepsilon_i(P_k) \geqslant v(i), \quad i \in P_k. \tag{6}$$

Аксиома 1. *i-й игрок ($i \in P_N - P_{k-1}$) заинтересован вступить в коалицию P_{k-1} только в том случае, если будет выполнено условие* (6).

Аксиома 2. *Коалиция P_{k-1} примет в свой состав k-го игрока, если*

$$\pi(P_k) \geqslant \pi(P_{k-1}). \tag{7}$$

Первая аксиома утверждает, что игроку имеет смысл вступить в коалицию, если его выигрыш в ее составе не окажется меньше, чем в случае, когда он действует самостоятельно. Вторая аксиома утверждает, что в данную коалицию игрок может быть принят только в том случае, если средний доход членов коалиции при этом не уменьшится.

Определение. Коалицию P_k назовем оптимальной, если прием любого заинтересованного вступить в нее (с точки зрения получения наибольшего дохода) $(k+1)$-го игрока приведет к уменьшению значения функции $\pi(P_k)$.

Теорема. *Непересекающиеся коалиции P_i^1, P_j^2, $P_k^3, \ldots$ являются оптимальными в коалиционной игре с трансферабельностью в том и только в том случае, если они удовлетворяют следующим условиям:*

$$\pi(P_i^1) = \pi(\bar P_i^1) = \max_{P_s \subseteq \mathcal{P}(N)} \pi(P_s), \qquad P_i^1 = \bigcup P_i^1;$$

$$\pi(P_j^2) = \pi(P_j^2) = \max_{P_s \subseteq \mathcal{P}(N-i)} \pi(P_s), \quad P_s \cap P_i^1 = \phi, \qquad P_j^2 = \bigcup \bar P_j^2;$$

$$\pi(P_k^3) = \pi(\bar P_k^3) = \max_{P_s \subseteq \mathcal{P}(N-i-j)} \pi(P_s), \quad P_s \cap P_i^1 = \phi, \quad P_s \cap P_j^2 = \phi, \quad P_k^3 = \bigcup \bar P_k^3.$$

. . . .

При этом оказывается, что $\pi(P_i^1) > \pi(P_j^2) > \pi(P_k^3) > \ldots$

Итак, в коалиционной игре с транферабельностью образуется последовательность коалиций P_i^1, P_j^2, $P_k^3, \ldots$, средний доход членов в которых различен; причем образование коалиций определяется скорее интересами не тех игроков, которые могут обеспечить себе самостоятельно сравнительно большой гарантированный доход (4), а интересами тех, кто своей стратегией может сделать функции f_i некоторых игроков достаточно большими, а также интересами этих последних. В общем случае образуется главная выигрывающая коалиция P_i^1, вторая, менее выигрывающая, коалиция P_j^2, третья и т. д., и, наконец, последняя, «проигрывающая» коалиция P_z, доход которой $v(P_z)$ удовлетворяет неравенству

$$v(P_z) \leqslant v(P_N) - \sum_\alpha v(P^\alpha),$$

причем $v(P_z) \geqslant \sum_{i \in P_z} v(i)$, P^α — последовательность выигрывающих коалиций. В частном случае последовательность (8) может состоять всего из одного члена $\pi(P_N^1)$; оптимальные (или ε-оптимальные) стратегии игроков в этом случае находятся из решения задачи определения верхней грани J_{P_N}.

Понятие решения. Под решением коалиционной игры с трансферабельностью понимается последовательность оптимальных коалиций из (8) и соответствующий этой последовательности набор оптимальных (или ε-оптимальных) гарантирующих стратегий

$$\{\varphi_{P_i^1}, \varphi_{P_j^2}, \varphi_{P_k^3}, \ldots, \varphi_{P_z}\}, \tag{9}$$

удовлетворяющих (1), т. е. являющихся решениями некоторых антагонистических игр (двух лиц).

Следует иметь в виду, что в результате применения стратегий (9) каждая P^β коалиция получает реализованный доход, не равный $v(P^\beta)$, а не меньший, чем $v(P^\beta)$.

Замечание 1. В (6) и (7) можно принять строгое неравенство. Это будет означать, что в случае $\pi(P_k) = \pi(P_{k+1})$ $(k+1)$-му игроку можно играть единолично, причем это не изменит ни его дохода, ни среднего дохода коалиции P_k; иначе говоря, в этом случае $(k+1)$-й игрок образует отдельную «коалицию» с тем же средним доходом, что и в коалиции P_k.

Примечание при корректуре.

Замечание 2. Если в игре оказывается, что

$$J_{P_N} - [J_{P_i^1}(\varphi_{P_i^1}, \varphi_{P_j^2}, \ldots) + \ldots] = \Delta J_1 > 0, \tag{10}$$

где $J_{P_N} = \sup_{\bar\varphi_{P_N}} J_{P_N}(\bar\varphi_{P_N})$, а $\varphi_{P_i^1}$, $\varphi_{P_j^2}, \ldots$ — последовательность оптимальных коалиций из (9), то для распределения между коалициями величины ΔJ_1 итерационно используется изложенная схема распределения дохода, согласно которой из уже созданных коалиций P_i^1, $P_j^2, \ldots$ создаются новые коалиции $Q_r^1, Q_s^1, \ldots,$ для которых снова проверяется условие вида (10). И если окажется, что $\Delta J_2 > 0$ (т. е. суммарный прирост доходов коалиций $P_i^1, P_j^2, \ldots$ в составе коалиций $Q_r^1, Q_s^1, \ldots$ равен $(\Delta J_1 - \Delta J_2)$), то производится третий этап укрупнения; и так далее, до тех пор, пока на некотором k-м этапе не окажется $\Delta J_k = 0$. Очевидно, всегда будет $\Delta J_1 > \Delta J_2 > \ldots$ $\ldots > \Delta J_k = 0$.

Замечание 3. Отличие полученного решения существенных игр от решения ([1]) обусловлено заменой соотношения предпочтения аксиомой 2.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, М., 1970. [2] К. Берж, Введение в теорию игр нескольких лиц, М., 1961. [3] Дж. Мак-Кинси, Введение в теорию игр, М., 1958.