

УДК 517.53 : 517.944/.947

МАТЕМАТИКА

А. С. СОРОКИН

ФОРМУЛА ВИЛЛЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векун 2 X 1972)

Рассмотрим обобщенное уравнение Коши—Римана

$$dw(z) / d(\bar{z}) + B(z) \overline{w(z)} = 0, \quad (1)$$

где $B(z) \in L_p(G)$, $p > 2$, а G — кольцевая область $R_1 < |z| < R_0$ на плоскости z .

Продолжая за пределы кольца G в два кольца, примыкающих к G , коэффициент уравнения (1) по закону

$$B_0(z) = -(R_k / \bar{z})^2 \bar{B}L_k(z), \quad k = 0, 1, \quad (2)$$

где $L_k(z) = R_k^2 / z$, затем в два дальнейших кольца и так далее, а в пределе на всю плоскость z , будем рассматривать уравнение (1) на всей плоскости.

Обозначим через $\Omega_1(z, \xi)$ и $\Omega_2(z, \xi)$ нормальные ядра полученного таким путем уравнения.

Поставим теперь следующую задачу: отыскать в кольце G регулярное решение $w(z)$ уравнения (1), непрерывное в G и удовлетворяющее условию

$$\operatorname{Re} w(\xi) = f_k(\xi), \quad \xi \in C_k = \{|\xi| = R_k\}, \quad k = 0, 1. \quad (3)$$

В этой работе дается полное решение этой задачи. Сделаем несколько предварительных замечаний.

Если функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению (1) внутри области G , то ее продолжения

$$w_*(z) = \bar{w}L_k(z), \quad k = 0, 1,$$

за пределы кольца G в два кольца, примыкающих к G .

$$w_{**}(z) = \bar{w}_*L_p(z), \quad p \neq k, \quad p = 0, 1$$

в два дальнейших кольца и так далее, будут непрерывными вне G (в соответствующих кольцах) и будут удовлетворять уравнению (1) (с коэффициентом (2)) вне G .

Известно ((¹), стр. 314), что решение уравнения (1) можно представить в виде

$$w(z) = w^0(z) + w^1(z) + C_1' w_0(z) + C_2' w_1(z), \quad (4)$$

где $w^0(z)$, $w^1(z)$ — регулярные решения уравнения (1) в областях $|z| < R_0$, $|z| > R_1$ соответственно, а $w_0(z)$ и $w_1(z)$ — константные решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям ((¹), стр. 173)

$$w_0(\infty) = 1, \quad w_1(\infty) = i. \quad (5)$$

Величины C_1' и C_2' — некоторые вещественные числа.

В дальнейшем потребуются формулы

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \Omega_1(z, \zeta) \overline{w^0(\zeta)} d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) w^0(\zeta) \overline{d\zeta} = \\
 & = w_0(z) \operatorname{Re} w^0(0) - w_1(z) \operatorname{Im} w^0(0) - \overline{w^0} L_1(z), \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \Omega_1(z, \zeta) w^1(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w^1(\zeta)} \overline{d\zeta} = \\
 & = w_0(z) \operatorname{Re} w^1(\infty) + w_1(z) \operatorname{Im} w^1(\infty) - w^1(z), \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \Omega_1(z, \zeta) \overline{w^0(\zeta)} d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) w^0(\zeta) \overline{d\zeta} = \\
 & = w_0(z) \operatorname{Re} w^0(0) - w_1(z) \operatorname{Im} w^0(0), \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \Omega_1(z, \zeta) w^1(\zeta) d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w^1(\zeta)} \overline{d\zeta} = \\
 & = w_0(z) \operatorname{Re} w^1(\infty) + w_1(z) \operatorname{Im} w^1(\infty).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Они получаются для $z \in G$ из обобщенной формулы Коши ⁽¹⁾, стр. 185.

Для $w^0(z)$, $w^1(z)$ нетрудно получить систему уравнений.

Умножим обе части равенства (3) на

$$\frac{1}{2\pi i} \omega_k(z, \zeta) d\zeta,$$

где

$$\omega_k(z, \zeta) = \Omega_1(z, \zeta) - \Omega_2(z, \zeta) \cdot L'_k(\zeta), \tag{7}$$

и проинтегрируем произведение по C_k , $k = 0, 1$. Затем, заменив в полученном равенстве $w(z)$ по формуле (4) и преобразовав результат с помощью формул (6), придем к искомой системе уравнений для функций $w^0(z)$ и $w^1(z)$:

$$w^0(z) + \overline{w^1} L_0(z) = F_0(z), \tag{8}$$

$$w^1(z) + \overline{w^0} L_1(z) = F_1(z),$$

где

$$F_0(z) = F_0(z) - C'_1 [w_0(z) + w_0 \overline{L}_0(z)] + C'_2 [w_1(z) - w_1 \overline{L}_0(z)], \tag{9}$$

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \omega_k(z, \zeta) \cdot f_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 0, 1. \tag{10}$$

В формулах (8) и (9) под $w^k \overline{L}_m(z)$ понимается суперпозиция функций $w_k(t)$ и $t = \overline{L}_m(z)$.

Полагая в формуле (9) $z = 0$, с помощью (8), (5) и нормировки функций $w^0(z)$, $w^1(z)$ получаем соотношение

$$C'_1 = \frac{F_0(0)}{1 + w_0(0)} - \frac{i - w_1(0)}{1 + w_0(0)} C'_2. \tag{11}$$

Приступая к решению системы (8), введем прежде всего некоторые необходимые функции от константных решений уравнения (1). Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}
 \lambda(z) &= - \frac{w_0(z) + w_0 \overline{L}_0(z)}{1 + w_0(0)}, \\
 \hat{w}(z) &= w_1(z) + w_0(z) \frac{i - w_1(0)}{1 + w_0(0)}, \\
 \tilde{w}(z) &= w_1 \overline{L}_0(z) - w_0 \overline{L}_1(z) \frac{i - w_1(0)}{1 + w_0(0)}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Будем решать систему (8) методом последовательных подстановок, представив каждую функцию $w^k(z)$, $k = 0, 1$, в виде ряда Неймана

$$w^k(z) = \sum_{v=0}^{\infty} w_v^k(z), \quad k = 0, 1. \quad (13)$$

За начальную подстановку возьмем свободный член уравнения

$$w_0^k(z) = \hat{F}_k(z), \quad k = 0, 1, \quad (14)$$

причем $\hat{F}_1(z) = F_1(z)$.

Если $w_v^k(z)$ уже построены, то следующая подстановка строится с помощью (8) и определяется рекуррентной формулой

$$w_{v+1}^k(z) = -\overline{w_v^{1-k}} L_k(z), \quad k = 0, 1; \quad v = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Полагая в (15) $v = 0, 1, 2, \dots$, с учетом формул (14), получаем

$$\begin{aligned} w_{2v}^k(z) &= \hat{F}_k(q^{2(1-2k)v}z), \quad q = R_1/R_0, \\ w_{2v+1}^k(z) &= -\hat{F}_{1-k}L_k(q^{2(1-2k)v}z), \quad k = 0, 1; \quad v = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Эти формулы позволяют записать ряд Неймана (13) в виде

$$w^k(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \hat{F}_k(q^{2(1-2k)v}z) - \sum_{v=0}^{\infty} \hat{F}_{1-k}L_k(q^{2(1-2k)v}z), \quad k = 0, 1. \quad (16)$$

Рассмотрим интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \omega_k(0, \zeta) f_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 0, 1.$$

Преобразовав эти интегралы с помощью (3), (4) и (6), получим

$$F_0(0) = F_1(0). \quad (17)$$

Это так называемое условие согласованности, необходимое для разрешимости поставленной задачи,

Полагая

$$\begin{aligned} \omega_1^k(q^2z, \zeta) &= \overline{\omega}_k(L_0(z), L_1(\zeta)) L_1^*(\zeta), \\ \omega_2^k(q^{-2}z, \zeta) &= \overline{\omega}_k(L_1(z), L_0(\zeta)) L_0^*(\zeta), \quad k = 0, 1, \end{aligned}$$

образуем ядра обобщенной формулы Вилля

$$\begin{aligned} K_1(z, \zeta) &= \omega_0(z, \zeta) - \frac{w_0(z)}{1 + w_0(0)} \omega_0(0, z) + \sum_{v=0}^{\infty} [\omega_0(q^{2v}z, \zeta) + \lambda(q^{2v}z) \cdot \omega_0(0, \zeta) + \\ &+ \omega_2^0(q^{-2v}z, \zeta) + \bar{\lambda}L_1(q^{-2(v-1)}z) \omega_2^0(\infty, \zeta)], \end{aligned} \quad (18)$$

$$K_2(z, \zeta) = \omega_1(z, \zeta) + \sum_{v=1}^{\infty} [\omega_1(q^{-2v}z, \zeta) + \omega_1^*(q^{2v}z, \zeta)].$$

Пусть

$$\hat{w}_1(z) = \hat{w}(z) + \sum_{v=1}^{\infty} [\hat{w}(q^{2v}z) - \tilde{w}(q^{2v}z)] + \sum_{v=0}^{\infty} [\tilde{w}L_1(q^{-2v}z) - \hat{w}L_1(q^{-2v}z)]. \quad (19)$$

Подставляя в (16) выражения (10), получаем интегральные представления функций $w^k(z)$ по вещественной части обобщенной аналитической внутри кольцевой области функции $w(z)$ на граничных компонентах области G . С помощью полученных формул для $w^k(z)$ и формулы (11) из (4) имеем интегральное представление обобщенной аналитической в кольцевой области функции по ее вещественной части на граничных компонентах области G , являющееся решением поставленной выше задачи.

Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема. Пусть $w(z)$ есть регулярное и однозначное решение в кольце G уравнения (1) с коэффициентом, принадлежащим L_p , $p > 2$, и пусть вещественная часть $w(z)$ на граничных компонентах C_k , $k = 0, 1$, принимает непрерывные значения $f_k(\xi)$.

Тогда имеет место формула

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f_0(\xi) K_1(z, \xi) d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f_1(\xi) K_2(z, \xi) d\xi + C_2' \hat{w}_1(z), \quad (20)$$

где C_2' — вещественное число, $\hat{w}_1(z)$ определяется формулой (19), ядра $K_1(z, \xi)$, $K_2(z, \xi)$ — формулами (18). Функции $f_k(\xi)$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \omega_0(0, \xi) f_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \omega_1(0, \xi) f_1(\xi) d\xi, \quad (17')$$

где $\omega_k(z, \xi)$, $k = 0, 1$, находятся по (7).

Наметим ход доказательства теоремы. Из соотношений для нормальных ядер уравнения (1) ((¹), стр. 178) и того факта, что z принадлежит замкнутому множеству E , лежащему строго внутри области G , следует абсолютная и равномерная сходимость внутри области G рядов в формулах (18), (19). Это вместе с формулами (7), (12) позволяет утверждать, что для любого z из замкнутого множества E , лежащего внутри области G , и $\xi \in C_k$ имеем равномерную ограниченность внутри кольца функции $\hat{w}(z)$ и ядер обобщенной формулы $K_1(z, \xi)$, $K_2(z, \xi)$.

Однозначность функции $w(z)$ есть следствие соотношения (17). Преобразуя (17) с помощью (10), получаем (17').

Идея доказательства, что вещественная часть функции (20) на границах кольца G обращается в заданные непрерывные функции $f_k(\xi)$, состоит в выделении в правой части формулы (20) обобщенного интеграла Шварца и применении к остаточной части (20) теоремы Хелли о предельном переходе под знаком интеграла. Рассматривая вещественную часть преобразованной правой части формулы (20), получаем обобщенную формулу Шварца ((¹), стр. 310). Имеем, что вещественная часть $w(\xi)$ равна заданной функции $f_k(\xi)$.

Интегральное представление (20) будем называть обобщенной формулой Вилля. Эта формула выражает обобщенную аналитическую в кольце функцию через граничные значения ее вещественной части.

Следствие 1. Если в формуле (20) положить $B(z) \equiv 0$, то получаем известную формулу Вилля для аналитических в кольце функций ((²), стр. 328).

Следствие 2. Если в формуле (20) устремить R_1 к нулю, то в результате предельного перехода получаем обобщенную формулу Шварца ((¹), стр. 308).

В заключение заметим, что формула интегрального представления аналитической внутри конечносвязной круговой области функции по ее вещественной части на граничных компонентах ((³)) может быть обобщена на функции, удовлетворяющие уравнению (1) внутри конечносвязной круговой области.

Всесоюзный научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт добычи угля гидравлическим способом
Новокузнецк

Поступило
23 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ² Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, М., 1970. ³ И. А. Александров, А. С. Сорокин, ДАН, 175, № 6 (1967).