Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 4

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

А. Б. КАТОК

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ПОТОКОВ НА ОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 XI 1972)

1. Пусть M — ориентируемая поверхность рода $p \geqslant 1$, v — векторное поле на M класса C^1. Обозначим $\{S_t^v\}$ поток, порождаемый векторным полем v, $I(v)$ — множество нулей векторного поля v, т. е. неподвижных точек потока $\{S_t^v\}$, $\Omega(v)$ — множество неблуждающих точек потока $\{S_t^v\}$. Всюду в этой заметке, если не оговорено иное, предполагается, что выполнены следующие два условия.

1.1. Множество $I(v)$ содержит только невырожденные седла и, следовательно, состоит ровно из $2p-2$ точек.

1.2. $\Omega(v) = M$.

Из результатов А. Г. Майера ([1], исправление неточности, содержащейся в доказательстве, см. [2]) следует, что поверхность M представляется в виде объединения областей $M_1, \ldots, M_k$ с попарно непересекающимися внутренностями, так что границы этих областей состоят из сепаратрис неподвижных точек и либо внутренность области M_i заполнена замкнутыми траекториями, либо любая отличная от сепаратрисы полутраектория, лежащая внутри области, всюду плотна в этой области.

Приводимые ниже утверждения наиболее содержательны в том случае, когда поток $\{S_t^v\}$ топологически транзитивен.

Мы будем называть борелевскую меру μ на M нетривиальной инвариантной мерой потока $\{S_t^v\}$, если эта мера инвариантна относительно $\{S_t^v\}$, мера любой траектории потока $\{S_t^v\}$ равна нулю и $\mu(M \setminus U) < \infty$ для любой окрестности U множества $I(v)$.

Предложение 1. *Поток $\{S_t^v\}$ имеет нетривиальную инвариантную меру, положительную на любом открытом множестве.*

2. Пусть γ: $[0, 1] \to M$ — путь класса C^1 на M. Построим отображение γ' ориентированного квадрата в M, полагая $\gamma'(s, t) = S_t^v\gamma(s)$, $s, t \in [0, 1]$. Если μ — нетривиальная инвариантная мера потока $\{S_t^v\}$, то существует конечный предел

$$\lambda_\mu^v(\gamma) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int\limits_{[0,1]\times[0,t]} \operatorname{sgn} J(\gamma^{-1})\, d(\gamma')^* \mu$$

($J(\gamma')$ — якобиан отображения γ'), который, по аналогии по случаям гладкой меры, будем называть потоком меры μ, переносимым векторным полем v через γ.

Продолжим функцию λ_μ^v линейно на пространство $S(M)$ гладких (класса C^1) 1-цепей на M с вещественными коэффициентами.

Предложение 2. λ_μ^v — *коцикл, т.е.* $\lambda_\mu^v(\gamma) = 0$ *для любого гомологичного нулю цикла* γ.

Класс когомологий коцикла λ_μ^v обозначим $\bar\lambda_\mu^v$. Оператор двойственности Пуанкаре π: $H^1(M; \mathbf{R}) \to H_1(M; \mathbf{R})$ переводит $\bar\lambda_\mu^v$ в элемент группы гомологий $H_1(M, \mathbf{R})$, который называется классом вращения потока $\{S_t^v\}$ относительно меры μ (см. [3, 4])*. Мы допустим небольшую воль-

* Если мера μ бесконечна, то определение класса вращения через асимптотические циклы [3] не эквивалентно приведенному.

ность в терминологии и будем называть λ_μ^v также классом вращения.

Пусть μ_1, μ_2 — нетривиальные инвариантные меры потока $\{S_t^v\}$.

Предложение 3. *Если поток $\{S_t^v\}$ не имеет замкнутых траекторий и $\lambda_{\mu_1}^v = \lambda_{\mu_2}^v$, то $\mu_1 = \mu_2$.*

Предложение 4. $\bar{\lambda}_{\mu_1}^v(\pi\bar{\lambda}_{\mu_2}^v) = 0$.

Предложение 3 нетрудно вывести из предложения 2 и топологической транзитивности потока $\{S_t^v\}$ в областях $M_1, \ldots, M_k$ (см. п.1).

Пусть $\alpha \in H^1(M; \mathbf{R})$, $\beta \in H_1(M; \mathbf{R})$. Значение $\alpha(\beta)$ равно индексу пересечения $\pi\alpha \cdot \beta$. Поэтому предложение 4 можно сформулировать так: *Индекс пересечения классов вращения любых двух нетривиальных инвариантных мер потока $\{S_t^v\}$ равен нулю.*

Выберем такую окрестность U множества $I(v)$, что $\mu(M \setminus U) > 0$ для любой нетривиальной инвариантной меры μ. Назовем меру μ нормированной, если $\mu(M \setminus U) = 1$.

Из предложений 3 и 4 следует

Теорема 1. *Если поток $\{S_t^v\}$ не имеет замкнутых траекторий, то он имеет не более p различных нормированных эргодических нетривиальных инвариантных мер.*

3. Обозначим $K(v)$ конус в пространстве $H^1(M; \mathbf{R})$, порожденный классами вращения всех эргодических нетривиальных инвариантных мер потока $\{S_t^v\}$. Этот конус эквивариантен при гомеоморфизмах: если гомеоморфизм φ: $M \to M$ переводит траектории потока $\{S_t^{v_1}\}$ в траектории потока $\{S_t^{v_2}\}$, то $\varphi^* K(v_2) = K(v_1)$. Если M — тор $(p = 1)$, то хорошо известно, что конус $K(v)$ состоит из единственного луча и полностью характеризует топологический тип потока $\{S_t^v\}$. При $p \geqslant 2$ к значениям потока меры, переносимого векторным полем через замкнутые кривые, нужно добавить еще значения потоков через пути, соединяющие неподвижные точки.

Назовем фундаментальным классом потока $\{S_t^v\}$ относительно нетривиальной инвариантной меры μ линейный функционал $\hat{\lambda}_\mu^v$ на группе относительных гомологий $H_1(M, I(v); \mathbf{R})$, порождаемый коциклом λ_μ^v. Фундаментальные классы эргодических нетривиальных инвариантных мер потока $\{S_t^v\}$ порождает конус $\hat{K}(v)$ в $(4p-3)$-мерном пространстве $(H_1(M, I(v); \mathbf{R}))^*$, который также эквивариантен при гомеоморфизмах. Полезность понятия фундаментального класса показывают теоремы 2 и 3.

Обозначим $\Gamma^1(TM)$ пространство C^1 векторных полей на M.

Теорема 2. *Пусть μ — нетривиальная инвариантная мера потока $\{S_t^v\}$, положительная на любом открытом множестве. Существует окрестность V векторного поля v в пространстве $\Gamma^1(TM)$ со следующим свойством: если $v' \in V$, $I(v') = I(v)$ и поток $\{S_t^{v'}\}$ имеет нетривиальную инвариантную меру μ' такую, что $\hat{\lambda}_{\mu'}^{v'} = \hat{\lambda}_\mu^v$, то поток $\{S_t^{v'}\}$ топологически сопряжен потоку $\{S_t^v\}$.*

Правдоподобно, что аналогичное утверждение справедливо не только для близких потоков.

Гипотеза 1. *Пусть $I(v) = I(v')$, $\hat{K}(v') = \hat{K}(v)$. Тогда потоки $\{S_t^v\}$ и $\{S_t^{v'}\}$ топологически сопряжены. Если же потоки $\{S_t^v\}$ и $\{S_t^{v'}\}$ топологически транзитивны, то для топологической сопряженности вместо равенства $\hat{K}(v') = \hat{K}(v)$ достаточно потребовать существования нетривиальных инвариантных мер μ и μ' таких, что $\hat{\lambda}_\mu^v = \hat{\lambda}_{\mu'}^{v'}$.*

4. Пусть ω — невырожденная 2-форма на M класса C^∞. Обозначим μ_ω меру, порождаемую ω, $\Gamma^\infty(TM, \omega)$ — пространство C^∞ векторных полей на M, сохраняющих ω, $\lambda_\omega^v = \lambda_{\mu_\omega}^v$. Векторные поля v, v' класса C^∞ назовем C^∞-эквивалентными, если существует C^∞-диффеоморфизм $\varphi : M \to M$, переводящий траектории потока $\{S_t^{v'}\}$ в траектории потока $\{S_t^v\}$.

Теорема 3. *Пусть* $v \in \Gamma^\infty(TM, \omega)$ *и поток* $\{S_t^v\}$ *удовлетворяет условию 1.1. Найдется такая окрестность* V *векторного поля* v *в пространстве* $\Gamma^\infty(TM, \omega)$, *что любое векторное поле* $v' \in V$, *для которого* $I(v') = I(v)$, $\hat{\lambda}_\omega^{v'} = \hat{\lambda}_\omega^v$, C^∞*-эквивалентно* v.

Пусть I — конечное подмножество M, состоящее из $2p-2$ точек. Пусть $\Gamma^\infty(TM, I, \omega) = \{v \in \Gamma^\infty(TM, \omega) : v(x) = 0 \quad \forall x \in I\}$, $\Gamma_1(I, \omega)$ — подмножество $\Gamma^\infty(TM, I, \omega)$ (очевидно, открытое), состоящее из векторных полей, удовлетворяющих условию 1.1, и, следовательно, отличных от нуля вне множества I.

Предложение 5. *Если векторное поле* v *удовлетворяет условиям 1.1 и 1.2, то найдется такое векторное поле* $v' \in \Gamma_1(I, \omega)$, *что потоки* $\{S_t^v\}$ *и* $\{S_t^{v'}\}$ *топологически эквивалентны.*

Обозначим $\Gamma_1'(I, \omega)$, подмножество $\Gamma_1(I, \omega)$, состоящее из векторных полей, имеющих гомологичные нулю замкнутые траектории $\Gamma_2(I, \omega)$ — дополнение $\Gamma_1(I, \omega)$ до замыкания $\Gamma_1'(I, \omega)$.

Предложение 6. *Пусть* $v \in \Gamma_1(I, \omega) \cap \partial\Gamma_2(I, \omega)$. *Пересечение границы* $\partial\Gamma_2(I, \omega)$ *с достаточно малой окрестностью векторного поля* v *принадлежит объединению конечного числа гиперплоскостей в* $\Gamma^\infty(TM, I, \omega)$.

Предложение 7. *Пусть* v, $v' \in \Gamma_2(\Gamma, \omega)$, $f: M \to M$ — *диффеоморфизм класса* C^1, *тождественный на множестве* I, *переводящий траектории потока* $\{S_t^{v'}\}$ *в траектории потока* $\{S_t^v\}$ (f_* — *автоморфизм группы* $H_1(M, I; \mathbf{R})$, *индуцированный* f.

Тогда $\hat{\lambda}_\omega^v = c\hat{\lambda}_\omega^{v'} \circ f_*$, *где* c — *некоторый скаляр.*

Другими словами, для векторных полей из $\Gamma_2(I, \omega)$ луч $\{t\hat{\lambda}_\omega^v : t \geqslant 0\} \subset (H_1(M, I; \mathbf{R}))^*$ эквивариантен при диффеоморфизмах.

Гипотеза 2. *Если* v, $v' \in \Gamma_2(I, \omega)$, $\hat{\lambda}_\omega^v = \hat{\lambda}_\omega^{v'}$, *то векторные поля* v *и* v' C^∞*-эквивалентны.*

Замечание. Структура всех описанных пространств векторных полей не зависит от выбора формы ω и множества I, так как для любых невырожденных 2-форм ω_1, ω_2 класса C^∞ с интегралом 1 и любых множеств $I_1, I_2 \subset M$, состоящих из $2p-2$ точек каждое, можно построить C^∞-диффеоморфизм f: $M \to M$ такой, что $f(I_1) = (I_2)$, $f^*\omega_2 = \omega_1$; см. ([5]).

5. Отображение $\Gamma_2(I, \omega) \to (H_1(M, I; \mathbf{R}))^* : v \mapsto \hat{\lambda}_\omega^v$ есть сужение на $\Gamma_2(I, \omega)$ линейного отображения $\Gamma^\infty(TM, I, \omega) \to (H_1(M, I; \mathbf{R}))^*$. Из ([1]) следует, что векторное поле $v \in \Gamma_2(I, \omega)$ либо топологически транзитивно, либо имеет негомологичную нулю замкнутую траекторию, либо имеет сепаратрису, идущую из одной неподвижной точки в другую. Во втором и третьем случаях существует целочисленное соотношение между значениями $\hat{\lambda}_\omega^v$ на элементах любого базиса группы целочисленных гомологий $H_1(M; I; \mathbf{Z}) \subset H_1(M, I; \mathbf{R})$. Таким образом, доказано

Предложение 8. *Можно указать счетное множество гиперплоскостей в* $\Gamma^\infty(TM, I, \omega)$ *таких, что для любого векторного поля* $v \in \Gamma_2(I, \omega)$, *не принадлежащего пересечению* $\Gamma_2(I, \omega)$ *с одной из этих гиперплоскостей, поток* $\{S_t^v\}$ *топологически транзитивен.*

Если M — тор, то топологическая транзитивность эквивалентна единственности инвариантной меры. При $p \geqslant 2$ это не так (см. ниже 6.1). Однако единственность нетривиальной инвариантной меры все-таки является типичным свойством в $\Gamma_2(I, \omega)$. Обозначим $\Gamma_3(I, \omega)$ подмножество $\Gamma_2(I, \omega)$, состоящее из таких векторных полей v, для которых μ_ω — единственная, с точностью до умножения на константу, нетривиальная инвариантная мера потока $\{S_t^v\}$. Очевидно, для $v \in \Gamma_3(I, \omega)$ поток $\{S_t^v\}$ эргодичен относительно меры μ_ω.

Теорема 4. *Множество* $\Gamma_3(I, \omega)$ *является подмножеством второй категории Бэра в* $\Gamma_2(I, \omega)$.

Гипотеза 3. *Существует множество* $A \subset (H_1(M, I; \mathbf{R}))^*$ *лебеговой меры нуль такое, что* $v \in \Gamma_3(I, \omega)$, *если* $\hat{\lambda}_\omega^v \notin A$.

Пусть σ — риманова метрика на M, ω_σ — 2-форма, ассоциированная с σ. Векторное поле v класса C^∞ называется гармоническим относительно метрики σ, если $v \rfloor \omega_\sigma$ — гармоническая 1-форма. Обозначим J_σ: $TM \to TM$ оператор, действующий в каждом касательном пространстве T_xM, $x \in M$, как поворот на $\pi / 2$ в положительном направлении. Нетрудно показать, что v — векторное поле, гармоническое относительно σ, тогда и только тогда, когда $v \in \Gamma^\infty(TM, \omega_\sigma)$ и $v \circ J_\sigma \in \Gamma^\infty(TM, \omega_\sigma)$.

Предложение 9. *Пусть $v \in \Gamma_2(I, \omega)$ и поток $\{S_t^v\}$ топологически транзитивен. Существует C^∞-риманова метрика на M, относительно которой векторное поле v гармоническое.*

Предложение 9 используется в доказательстве теоремы 4 и, кроме того, оно может оказаться полезным для доказательства или опровержения гипотез 2 и 3.

6. Примеры.

6.1. Число инвариантных мер. Оценка, даваемая теоремой 1, достигается. Действительно, не представляет большого труда построить поток, для которого поверхность M разбивается на p инвариантных областей, так что в каждой области сосредоточена единственная нормированная нетривиальная инвариантная мера. Примеры такого рода имеются у А. Г. Майера ([1]), хотя там и не идет речь об инвариантных мерах. Более интересно, с точки зрения рассматриваемого нами круга вопросов, следующее утверждение, доказанное студентом МГУ Е. А. Сатаевым.

Для любого $k \leqslant p$ существует топологически транзитивный поток, удовлетворяющий условию 1.1 и имеющий ровно k нормированных эргодических нетривиальных инвариантных мер.

6.2. Конечные и бесконечные меры. Пусть $p = 2$. Эффекты, которые могут возникнуть, хорошо проявляются уже в этом случае.

Для топологически транзитивных потоков класса C^∞ реализуются все пять возможных ситуаций. Именно, поток может иметь единственную нормированную эргодическую нетривиальную инвариантную меру, конечную или бесконечную, или две конечных, или две бесконечных, или одну конечную и одну бесконечную нормированные эргодические нетривиальные инвариантные меры. При этом в качестве одной из конечных мер можно выбрать меру μ_ω.

Стимулом, побудившим автора заняться рассматриваемым в настоящей заметке кругом вопросов, послужили обсуждения с С. Х. Арансоном и В. З. Гринесом предложенного ими инварианта потоков на поверхностях — гомотопического класса вращения (см. ([2])). В частности, конструкция, лежащая в основе примеров из п.6 при $p = 2$, впервые появилась для ответа на поставленный С. Х. Арансоном и В. З. Гринесом вопрос о том, может ли у топологически транзитивного потока существовать траектория, не определяющая предельного направления в $H_1(M, \mathbf{R})$. Один из возможных способов доказательств гипотез 1 и 2 состоит в детальном исследовании связей между фундаментальным классом и гомотопическим классом вращения, который полностью характеризует топологический тип потока, но определяется неконструктивно.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Майер, Матем. сборн., **12** (54), 71 (1943). [2] С. Х. Арансон, В. З. Гринес, Матем. сборн., **90** (132), № 3, 372 (1973). [3] S. Schwarzman, Ann. Math., **66**, 270 (1957). [4] В. И. Арнольд, Функц. анализ, **3**, 77 (1969). [5] J. Moser, Trans. Am. Math. Soc., **120**, 286 (1965).