Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ФЕДОРЧУК

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ А. Н. ТИХОНОВА

(Представлено академиком П. С. Александровым 19 II 1973)

В 1923 г. П. С. Александров и П. С. Урысон в работе ([1]) доказали, что бикомпактные подмножества хаусдорфовых пространств замкнуты, и определили абсолютно замкнутые, или H-замкнутые пространства, как пространства, замкнутые во всяком объемлющем их хаусдорфовом пространстве. В 1929 г. А. Н. Тихонов ([2]) доказал, что всякое хаусдорфово пространство содержится в H-замкнутом, а в 1937 г. М. Стоун ([3]) доказал, что всякое хаусдорфово пространство имеет H-замкнутое расширение. В дальнейшем H-замкнутые пространства изучали М. Катетов ([4], [5]), С. В. Фомин ([6], [7]) и ряд других математиков. М. Катетов доказал, в частности, что всякое хаусдорфово пространство X имеет максимальное H-замкнутое расширение τX.

В 1956 г. А. Н. Тихонов поставил задачу построить все H-замкнутые расширения данного хаусдорфова пространства аналогично тому, как Ю. М. Смирнов ([8]) построил все бикомпактные расширения вполне регулярного пространства с помощью пространств близости. Хотя до этого теория H-замкнутых расширений хаусдорфовых пространств развивалась параллельно теории бикомпактных расширений вполне регулярных пространств, задача А. Н. Тихонова долгое время не поддавалась решению и, как видно из дальнейшего, не случайно.

Задачу А. Н. Тихонова наиболее общим образом можно сформулировать так: аксиоматически определить на хаусдорфовых пространствах близостные структуры (H-структуры) так, чтобы в полученную категорию вкладывалась категория пространств близости. При этом каждой близостной структуре η на данном пространстве X должно соответствовать одно и только одно H-замкнутое расширение $h_\eta X$ пространства X, и структура η должна индуцироваться близостной структурой расширения $h_\eta X$.

Задачу А. Н. Тихонова можно конкретизировать следующим образом: искомые близостные структуры (H-близости) должны, как и обычные близости, определяться бинарными отношениями на множестве всех подмножеств данного пространства.

В первом случае будем говорить об обобщенной задаче А. Н. Тихонова, во втором — о классической задаче А. Н. Тихонова.

В данной заметке показывается, что классическая задача А. Н. Тихонова не имеет решения, и дается решение обобщенной задачи А. Н. Тихонова в классе полурегулярных пространств. Обсуждается естественность класса полурегулярных пространств при решении этой задачи.

1. Классическая задача А. Н. Тихонова решения не имеет. Итак, будем решать классическую задачу. Сначала попробуем продолжить категорию $\mathscr{B}_0$ бикомпактных пространств близости на все H-замкнутые пространства. В предположении, что мы уже задали H-близости, естественно назвать H-близостно непрерывным отображением всякое отображение, при котором прообразы далеких множеств далеки. Чтобы продолжение $\mathscr{H}_0$ категории $\mathscr{B}_0$ было достаточно хорошим, естественно наложить на него следующие требования:

1) Все морфизмы θ-непрерывны.

2) Морфизмов достаточно много.

3) Бикомпакты достаточно хорошо аппроксимируют H-замкнутые пространства.

Имеет место теорема существования и единственности.

Теорема 1. *Бинарное отношение* η, *определенное на всяком* H-*замкнутом пространстве* X *условием* *

$$A \bar{\eta} B \Leftrightarrow [A]^\theta \cap [B]^\theta = \varnothing$$

задает единственное продолжение $\mathcal{H}_0$ *категории* $\mathcal{B}_0$ *бикомпактных пространств близости на все* H-*замкнутые пространства, обладающее следующими свойствами:*

1) *Все морфизмы категории* $\mathcal{H}_0$ θ-*непрерывны.*

2) *Все* θ-*непрерывные отображения бикомпактов являются морфизмами категории* $\mathcal{H}_0$.

3) *Всякие два* H-*близкие множества имеют близкие прообразы в бикомпакте.*

Какие следствия можно извлечь из этой теоремы? Во-первых, то, что классическая задача А. Н. Тихонова имеет не более одного решения, а во-вторых, то, что в самой общей постановке классическая задача А. Н. Тихонова решения не имеет. В самом деле, θ-гомеоморфные H-замкнутые пространства имеют одну H-близость. Поэтому θ-гомеоморфные H-замкнутые расширения порождают на данном хаусдорфовом пространстве одну и ту же H-близость. Следовательно, нельзя установить взаимно однозначное соответствие между H-близостями на данном хаусдорфовом пространстве и его H-замкнутыми расширениями, порождающими эти H-близости.

Таким образом, приходится ограничиться лишь такими пространствами, все θ-гомеоморфизмы которых являются гомеоморфизмами, т. е. в точности полурегулярными пространствами (см. [10], предложение 1).

Но и в классе полурегулярных пространств классическая задача А. Н. Тихонова решения не имеет. В самом деле, имеет место

Теорема 2. *Бесконечное дискретное пространство* N *имеет* $2^{2^{2^{|N|}}}$ *полурегулярных* H-*замкнутых расширений* **.

В то же время количество бинарных отношений на множестве всех подмножеств множества N равно $2^{2^{|N|}}$. Следовательно, бинарных отношений не хватает для описания всех полурегулярных H-замкнутых расширений.

2. Решение обобщенной задачи А. Н. Тихонова. Здесь нам понадобится понятие θ-близости, введенное и изученное в работах [11, 12].

Пусть X — хаусдорфово пространство и η — некоторое семейство θ-близостей на пространстве X. Пусть ξ — собственный фильтр открытых множеств пространства X, или, кратко, открытый фильтр. Открытое множество $G \subset X$ назовем η-окрестностью фильтра ξ, если существует такой открытый фильтр $\tau \supset \xi$, что для любой θ-близости $\delta \in \eta$ некоторый элемент U фильтра τ δ-подчинен множеству G $(U \bar{\delta} (X \setminus [G]))$. Семейство η может состоять из одной θ-близости δ. В этом случае мы будем говорить о $\{\delta\}$-окрестностях.

Основное определение. Семейство θ-близостей η называется H-структурой на топологическом пространстве X, если выполнены следующие аксиомы:

I_H. Если открытые фильтры ξ_1 и ξ_2 имеют непересекающиеся η-окрестности, то для любой точки $x \in X$ существуют такие η-окрестности G_i фильтров ξ_i, $i = 1, 2$, что $x \notin [G_1] \cap [G_2]$.

* Через $[C]^\theta$ обозначается θ-замыкание множества C, т. е. $[C]^\theta = \{x \in X \mid [Ox] \cap C \neq \varnothing$ для всякой окрестности $Ox\}$ (см. [9]).

** Здесь через $|N|$ обозначена мощность множества N.

II_H. Если существует η-окрестность открытого фильтра ξ_1, не пересекающаяся с некоторым элементом открытого фильтра ξ_2, то фильтры ξ_1 и ξ_2 имеют непересекающиеся η-окрестности.

III_H. Если всякая η-окрестность является $\{\delta\}$-окрестностью, то $\delta \in \eta$.

Теорема 3. *Множество $\eta(X)$ всех θ-близостей на H-замкнутом пространстве X является единственной H-структурой на X.*

Если X — топологическое пространство и δ — θ-близость на нем, то ее след δ_Y на всяком всюду плотном подпространстве Y будет θ-близостью (см. ([10]), лемма 3). Пусть η — семейство θ-близостей на X и Y всюду плотно в X; положим $\eta_Y = \{\delta_Y \mid \delta \in \eta\}$.

Теорема 4. *Пусть η есть H-структура на пространстве X и Y всюду плотно в X.*

Тогда семейство η_Y является H-структурой на Y.

Итак, можно говорить об H-структуре, индуцированной на пространстве X H-замкнутым расширением hX.

Теорема 5. *Пусть η есть H-структура на полурегулярном пространстве X. Тогда существует и притом единственное полурегулярное H-замкнутое расширение $h_\eta X$, которое индуцирует на X данную H-структуру η.*

Следствие. *Множество H-структур на полурегулярном пространстве X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством полурегулярных H-замкнутых расширений пространства X.*

Итак, обобщенная задача А. Н. Тихонова решена в классе полурегулярных пространств. Ограничение на класс пространств естественно, поскольку всякое более или менее удовлетворительное близостью описание H-замкнутых расширений тем или иным образом связано с аппроксимацией H-замкнутых пространств бикомпактами (как, например, в теореме 1).

Но только различные полурегулярные пространства имеют различные классы бикомпактных прообразов при θ-непрерывных отображениях. Кроме того, имеет место

Теорема 6. *Бесконечное дискретное пространство N имеет $2^{2^{2^{|N|}}}$ H-замкнутых расширений.*

Эта теорема, подтверждая естественность класса полурегулярных пространств, показывает, что для описания произвольных H-замкнутых расширений не хватает и семейств близостей.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 II 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, «Наука», 1971. [2] A. N. Tichonoff, Math. Ann., **102**, 544 (1929). [3] M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc., **41**, 375 (1937). [4] M. Katětov, Casopis mat. fys., **69**, 36 (1940). [5] M. Katětov, Casopis mat. fys., **72**, 17 (1947). [6] С. В. Фомин, ДАН, **32**, № 2, 114 (1941). [7] S. V. Fomin, Ann. math., **44**, 471 (1943). [8] Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **31**, 543 (1952). [9] Н. В. Величко, Матем. сборн., **70**, № 1, 98 (1966). [10] В. В. Федорчук, Матем. сборн., **89**, № 3, 400 (1972). [11] В. В. Федорчук, ДАН, **180**, № 3, 546 (1968). [12] В. В. Федорчук, Матем. сборн., **76**, № 4, 513 (1968).