

С. М. КРАСНИТСКИЙ

**ОБ УСЛОВИЯХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР,
СООТВЕТСТВУЮЩИХ ГАУССОВСКИМ ПОЛЯМ,
ОТЛИЧАЮЩИМСЯ СРЕДНИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ**

(Представлено академиком В. М. Глушковым 21 XI 1972)

Пусть $t = (t_1, \dots, t_n) \in T \subset R^n$, R^n — n -мерное евклидово пространство. Рассмотрим гауссовские случайные поля $\xi(t)$ и $\eta(t)$, считая, что $\xi(t)$ является однородным и имеет нулевое среднее, а $\eta(t)$ имеет ту же корреляционную функцию, что у $\xi(t)$, и среднее $a(t)$, отличное от нулевого. Для статистики представляет интерес вопрос о том, являются ли меры, соответствующие $\xi(t)$ и $\eta(t)$, эквивалентными (или ортогональными). В случае $n = 1$ основные результаты по этому поводу содержатся в ⁽³⁾. Некоторые сведения о рассматриваемом вопросе в случае произвольного n имеются в ⁽²⁾. В настоящей работе будет предполагаться, что $\xi(t)$ обладает спектральной плотностью $f(\lambda)$. В предположениях относительно $f(\lambda)$, вообще говоря, отличающихся от тех, что делались в ⁽²⁾, получены некоторые условия эквивалентности мер, соответствующих $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Пусть μ и μ_a — меры, соответствующие $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Известно (см. ⁽²⁾), что для эквивалентности μ и μ_a необходимо и достаточно, чтобы функция $a(t)$ допускала представление

$$a(t) = \int_{R^n} e^{-i\langle \lambda, t \rangle} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad t \in T,$$

где $\langle \lambda, t \rangle = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n$, $\varphi(\lambda)$ — некоторая функция, интегрируемая в квадрате с весом $f(\lambda)$. Отсюда следует

Теорема 1. Для эквивалентности μ и μ_a достаточно, чтобы функция $a(t)$ была непрерывной в T и допускала интегрируемое с квадратом продолжение на все R^n , преобразование Фурье которого $b(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\int_{R^n} |b(\lambda)|^2 [f(\lambda)]^{-1} d\lambda < \infty.$$

В случае ограниченной спектральной плотности это условие является необходимым.

Определение. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n)$. Будем говорить, что функция $a(t)$, $t \in T$, принадлежит классу $W_2^l(T)$, если для любого j , $1 \leq j \leq n$, существует обобщенная в смысле С. Л. Соболева производная от $a(t)$ по t_j порядка l_j и конечна величина

$$\|a\|_{W_2^l(T)} = \|a\|_{L_2(T)} + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^{l_j} a}{\partial t_j^{l_j}} \right\|,$$

где

$$\|a\|_{L_2(T)} = \left[\int_T |a(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

Предположим, что $f(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$f(\lambda) \cdot \sum_{j=1}^n (1 + \lambda_j^2)^{l_j} \leq c = \text{const},$$

где l_j — неотрицательные целые числа. Тогда справедлива

Теорема 2. Для эквивалентности μ и μ_a необходимо, чтобы функция $a(t)$, $t \in T$, была непрерывной в T и принадлежала $W_2^l(T)$ при $l = (l_1, \dots, l_n)$.

Замечание 1. В дальнейшем всюду, где предполагается, что $a(t)$, $t \in T$, принадлежит $W_2^l(T)$, считается, что существует функция $a(t)$, $t \in R^n$, продолжающая $a(t)$, $t \in T$, и принадлежащая $W_2^l(R^n)$ (см. (1, 4)). В частности, если l таково, что $l_1 = \dots = l_n$, для существования такого продолжения достаточно, чтобы множество T имело липшицеву границу (см. (5)).

Пусть $f(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$f(\lambda) \cdot \sum_{j=1}^n (1 + \lambda_j^2)^{l_j} \geq c = \text{const} > 0,$$

где l_j — положительные целые числа. В этом случае из теоремы 1 следует

Теорема 3. Для эквивалентности μ и μ_a достаточно, чтобы функция $a(t)$ была непрерывной в T и принадлежала $W_2^l(T)$ при $l = (l_1, \dots, l_n)$.

Из теорем 2 и 3 легко вывести следующий результат.

Следствие. Пусть

$$c_1(1 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{-m} \leq f(\lambda) \leq c_2(1 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{-m},$$

где m — положительное целое число.

Тогда для эквивалентности μ_a и μ необходимо и достаточно, чтобы $a(t)$ была непрерывной в T и принадлежала $W_2^l(T)$ при $l = (m, \dots, m)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $f(\lambda) = P(\lambda) / Q(\lambda)$, где $P(\lambda)$ — положительный многочлен эллиптического типа (т. е. его главная часть отлична от нуля при $0 \neq \lambda \in R^n$) степени $2p$, $Q(\lambda)$ — положительный многочлен степени $2q$. Тогда имеет место

Теорема 4. Если функция $a(t)$, $t \in T$, непрерывна в T и принадлежит $W_2^l(T)$ при $l = (q - p, \dots, q - p)$, то меры μ и μ_a эквивалентны.

Замечание 2. Для некоторых видов дробно-рациональных спектральных плотностей можно доказать справедливость условий эквивалентности, несколько отличных от тех, что предлагаются в теореме 4. Так, пусть

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^n P_j(\lambda_j), \quad Q(\lambda) = \sum_{j=1}^n Q_j(\lambda_j),$$

где $P_j(\lambda_j)$ и $Q_j(\lambda_j)$ — положительные многочлены от λ_j степеней $2p_j$ и $2q_j$ соответственно, $j = 1, \dots, n$, $f(\lambda) = P(\lambda) / Q(\lambda)$.

Тогда, как следует из теоремы 3, если функция $a(t)$ непрерывна в T и принадлежит $W_2^l(T)$ при $l = (q_1 - p_1, \dots, q_n - p_n)$, то меры μ и μ_a эквивалентны.

Киевский институт инженеров
гражданской авиации

Поступило
17 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ О. В. Бесов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 89, 5 (1967).
² З. С. Зеракидзе, Тр. инст. прикл. матем. Тбилисс. ун-в., 2, 215 (1969). ³ И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, Гауссовские случайные процессы, М., 1970. ⁴ В. П. Ильин, Сибирск. матем. журн., 8, 3, 573 (1967). ⁵ С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969.