

В. И. МАЛЫХИН

НЕНОРМАЛЬНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ βX , ГДЕ X — ДИСКРЕТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

(Представлено академиком П. С. Александровым 28 XI 1972)

В работе доказывается ненормальность некоторых подпространств Чех-Стоуновского расширения дискретного пространства произвольной мощности, в частности, решается известная ⁽¹⁾ задача о ненормальности нароста над натуральным рядом без P -точки ([СН]).

Введем некоторые определения и обозначения. Фильтр Φ на X и замкнутое множество $\Phi^* = \bigcap \{[A]_{\beta X} : A \in \Phi\}$ отождествляются. Поэтому Φ — ультрафильтр, если и только если $|\Phi| = 1$. Если $[A]_{\beta X} \cap \Phi \neq \Lambda$, то будем говорить, что A касается фильтра Φ и записывать это так: $A^* \cap \Phi \neq \Lambda$.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $A \subset X$, $B \subset X$. Будем писать, что $t(A, B) \leq (<) m$, если $m = \min \{n : \text{если } M \subset B, [M] \cap A \neq \Lambda, \text{ то существует } C \subset M, |C| \leq (<) n, [C] \cap A \neq \Lambda\}$. (Это несколько отличается от аналогичного понятия, введенного в ⁽²⁾.)

Пусть (X, Φ) — множество с фильтром. Теснота фильтра Φ есть $t(\Phi, X)$. Если X — дискретное пространство, то βX отождествляется с пространством ультрафильтров на X . Назовем ультрафильтр x (m) -, $(<m)$ -, $(\leq m)$ -, $(>m)$ -, и т. д. — ультрафильтром, если существует база ультрафильтра из множеств соответствующей мощности. Соответственно этому обозначим $[X]_m = \{x \in \beta X : x \text{ — } m\text{-ультрафильтр}\}$ и т. д. Заметим, что $[X]_{\leq m} = \bigcup \{[A]_{\beta X} : |A| \leq m\}$, поэтому будем для произвольного топологического пространства писать $[A]_{\leq m} = \bigcup \{[B] : B \subset A, |B| \leq m\}$.

Иногда дискретное множество X и его мощность будут отождествляться. Тогда символы βn , $[n]_{<m}$ и т. д. обозначают соответствующие подпространства βX .

Теорема 1. $[m]_{<n} \setminus m$ ненормально, если и только если ненормально $[m]_{<n}$.

Доказательство. Пусть $|X| = m$, рассмотрим на X систему мощности m счетных попарно дизъюнктивных множеств $\{A_t : t \in T, |T| = m\}$. Обозначим $Y = \{y_t : y_t \in [A_t]_{\beta X} \setminus A_t\}$. Так как βX — экстремально-несвязный бикомпакт, то $[Y]_{\beta X} = \beta m$.

Легко видеть, что $[Y]_{<n} = [m]_{<n}$ лежит замкнуто в $[m]_{<n} \setminus m$, следовательно, $[m]_{<n} \setminus m$ ненормально.

Определение. Назовем n ненормальным кардиналом, если $[n]_{<n}$ ненормально.

Предложение 1. Если n — сингулярный кардинал, т. е. $k = \text{cf}(n) < n$, то n — ненормальный кардинал*.

Для доказательства приведем несколько лемм.

Лемма 1. Пусть $x \in \beta X$. Тогда $t(\{x\}, X) = \Delta x = \min_{A \in [A]_{\beta X}} \{|A| : A \in x\}$.

Действительно, если $A \subset X$, то $A \in x$.

* $\text{cf}(n)$ — конфинальный характер кардинала n . Это наименьший из кардиналов $|K|$ таких, что $X = \bigcup \{X_t : t \in K\}$, $|X_t| < |X|$; если $K' \subset K$, $|K'| < |K|$, то $|\bigcup \{X_t : t \in K'\}| < |X|$, но если $|K'| = |K|$, то $|\bigcup \{X_t : t \in K'\}| = |X|$.

Лемма 2. Если $t(\Phi) < m$ (здесь Φ — фильтр на X), то $[\Phi \cap \cap [X]_{<m}]_{\beta X} = \Phi$.

Верно и обратное.

Пусть $[\Phi \cap [X]_{<m}]_{\beta X} = \Phi$. Если $A \subset X$, $[A]_{\beta X} \cap \Phi \neq \Lambda$, то существует $x \in [A]_{\beta X} \cap \Phi \cap [X]_{<m}$, но тогда $\Delta x < m$ и по лемме 1 $t(\{x\}, X) < m$. Следовательно, в A есть B , $|B| < m$, $x \in [B]_{\beta X}$. Тем самым $[B]_{\beta X} \cap \Phi \neq \Lambda$. Обратное доказывается аналогично.

Докажем теперь предложение 1. Пусть $|X| = n$, $X = \Sigma\{X_i: t < \omega(k)\}$, где $k = \text{cf}(n)$ и сумма (дизъюнктивная) построена в соответствии с определением $\text{cf}(n)$. На всяком X_i возьмем фильтр Φ_i с базой $\{A_i^\alpha\}$, причем база есть система $\{A_i^\alpha: \alpha < \omega(k)\}$, если $\alpha < \beta$, то $A_i^\alpha \supset A_i^\beta$. Кроме того, $|A_i^t \setminus A_i^{t+1}| = |X_i|$ и на $A_i^t \setminus A_i^{t+1}$ рассмотрим произвольный фильтр F_i , которого не касается никакое подмножество мощности, меньшей, чем $|X_i|$.

Рассмотрим теперь на X два фильтра E_i . $A \in E_1$, если $A \supset \Sigma\{A_i^\alpha: t < \omega(k)\}$, α фиксировано и свое для каждого A . $A \in E_2$, если $A \supset \Sigma\{B_i: B_i \in F_i, t < \omega(k)\}$.

1) $t(E_1) \leq k$. Это очевидно, ибо мощность базы фильтра $E_1 \leq k$.

2) $t(E_2) \leq k$. Действительно, если $[A]_{\beta X} \cap F_i = \Lambda$ для всякого t , то $\Lambda = A \cap \Sigma\{R_i: R_i = X_i \setminus A, t < \omega(k)\}$, т. е. $A^* \cap E_2 = \Lambda$. Если же $A^* \cap F_{i_0} \neq \Lambda$, то так как $t(F_{i_0}) \leq |X_{i_0}| < n$, то существует $B \subset A$, $|B| < n$ и $B^* \cap F_{i_0} \neq \Lambda$ и тем самым $B^* \cap E_2 \neq \Lambda$.

Итак, по лемме 2 $[E_i \cap [X]_{<n}]_{\beta X} = E_i$. Докажем, что $E_1 \cap E_2 \cap [X]_{<n} = \Lambda$, но $E_1 \cap E_2 \neq \Lambda$. Последнее очевидно, ибо $X \in E_1 \cap E_2$.

Предположим, что $A \subset X$, $|A| < n$. Существует $t_1 < \omega(k)$ такой, что $t(F_i) > |A|$ при $t > t_1$. (Очевидно, можно предполагать, что слагаемые X_i идут, возрастая по мощности.) Тогда $A^* \cap F_i = \Lambda$ для всех $t > t_1$. Легко проверить, что $A \cap V_1 \cap V_2 = \Lambda$, где $V_1 = \Sigma\{A_i^{t_1+1}: t < \omega(k)\}$, а $V_2 = \Sigma\{B_i: B_i = X \setminus A_i^{t_1+1} \text{ при } t \leq t_1, \text{ и } B_i = X_i \setminus A \text{ при } t > t_1\}$. Следовательно, в $[X]_{<n}$ существуют два дизъюнктивных замкнутых множества, замыкания которых пересекаются в $\beta X = \beta([X]_{<n})$. Это было бы невозможно, если бы $[X]_{<n}$ было нормально.

Предложение 2. Если существует $k < n$, $2^k \geq n$, то n — «ненормальный» кардинал.

Доказательство. Пусть $|K| = k$, $D_1 = D^n$ (здесь D — несвязное двоеточие). Существует отображение $f: \beta K \rightarrow D_1$, которое мы предположим «на» и которое, очевидно, замкнуто. Так как $t(\{d\}, D_1) = n$ для любой точки $d \in D_1$, то существует замкнутое множество $\Phi \subset \beta K \setminus K$ и система $\Delta = \{\Phi_\alpha\}$ замкнутых множеств из $\beta K \setminus K$ со следующими свойствами:

1) Если $\Delta' \subset \Delta$, $|\Delta'| < n$, то $\Phi \cap [\cup \Delta']_{\beta K} = \Lambda$.

2) Однако если $|\Delta'| = n$, то $\Phi \cap [\cup \Delta']_{\beta K} \neq \Lambda$.

Рассмотрим множество $R = \Sigma\{K_\alpha: \alpha \in \Delta\}$, где K_α — точная копия множества K , на котором из всей системы фильтров оставим только Φ и Φ_α . Определим теперь фильтр F_1 так: $A \in F_1$, если $A \supset \Sigma\{P_\alpha: P_\alpha = B, B \in \Phi\}$, а фильтр F_2 так: $A \in F_2$, если $A \supset \Sigma\{P_\alpha: P_\alpha \in \Phi_\alpha\}$.

Заметим, что $t(F_i) \leq k$. Докажем, что $t(F_1 \cap F_2) > k$, а именно: $t(F_1 \cap F_2) = n$. Пусть $V \subset R$ и $|V| < n$. Обозначим $V_1 = \Sigma\{K_\alpha: K_\alpha \cap V \neq \Lambda\}$. Ясно, что $|V_1| < n$. Но тогда существуют множества $B \in \Phi$ и $B_\alpha \in \Phi_\alpha$ для всех таких α , что $K_\alpha \cap V \neq \Lambda$, такие, что $B \cap B_\alpha = \Lambda$. Следовательно, если $A_1 = \Sigma\{P_\alpha: P_\alpha = B\}$, а $A_2 = \Sigma\{P_\alpha: P_\alpha = B_\alpha, \text{ если } K_\alpha \cap V_1 \neq \Lambda \text{ и } P_\alpha = K_\alpha \text{ в противном случае}\}$, то $V_1 \cap A_1 \cap A_2 = \Lambda$, т. е. V_1 не касается фильтра $F_1 \cap F_2$. Однако $F_1 \cap F_2 \neq \Lambda$, ибо всегда $A_1 \cap A_2 \neq \Lambda$, если $A_i \in F_i$. Итак, $t(F_1 \cap F_2) = n$.

Чтобы завершить доказательство, заметим, что так как $t(F_i) \leq k$, то $[F_i \cap [R]_{<k}]_{\beta R} = F_i$, а $F_1 \cap F_2 \cap [R]_{<n} = \Lambda$, хотя $F_1 \cap F_2 \neq \Lambda$, тем самым $[R]_{<n}$ ненормально, т. е. n — ненормальный кардинал.

Следствие 1 (А. В. Архангельский). Для всякого кардинала m существуют пространства X_i' такие, что $t(X_i') \leq m$, но $t(X_1 \times X_2) > m$.

Действительно, подпространство $[m^+]_{<m^*}$ ненормально по предложению 2, т.е. существуют на множестве X два фильтра F_1, F_2 $t(F_i) \leq m$, но $t(F_1 \cap F_2) > m$. Пусть $(X_1, F_1), (X_2, F_2)$ — копии множества X , причем на каждой копии оставлено по фильтру. Можно теперь убедиться, что $t(X_1' \times X_2') > m$. Здесь $X_i' = X_i \cup \{F_i\}$, а топология такая: все точки из X_i изолированные, а фильтр окрестностей точки $\{F_i\}$, суженный на X_i , есть F_i .

Из предложений 1 и 2 вытекает теорема 2. Если $\aleph_0 < n < \varepsilon_1^*$, то n — ненормальный кардинал, а пространство $[m]_{<n}$ — дискретное пространство мощности ($n \leq m$) ненормально.

Последнее очевидно, ибо если $A \subset X, |X| = m, |A| = n$, то $[A]_{<n}$ лежит замкнуто в $[X]_{<n}$ и потому $[X]_{<n}$ ненормально.

Нерешенная задача. ε_1 — нормальный кардинал?

Заметим, что среди больших, чем ε_1 , кардиналов опять-таки много ненормальных (скажем, по предложению 2) кардиналов.

Теорема 3. $[m]_n$ ненормально при $\aleph_0 \leq n < m$.

Пусть $|X| = m$. Рассмотрим на X систему дизъюнктивных подмножеств $\{X_t: t \in T, |T| = n^+, |X_t| = n\}$ и пусть $y_t \in [X_t]_n$, а $Y = \{y_t: t \in T\}$. Легко видеть, что $[Y]_{<n^+}$ лежит замкнуто в $[m]_n$ и, так как $[Y]_{<n^+} = [n^+]_{<n^+}$ ненормально (по предложению 2), то и $[m]_n$ ненормально.

Следствие 1 (из теоремы 1 и теоремы 2, из теоремы 3) [CH]. Если N — счетное дискретное пространство, а p — P -точка ⁽³⁾ в $\beta N \setminus N$, то $\beta N \setminus N \setminus \{p\}$ ненормально.

Действительно, как замечено в ⁽¹⁾, $\beta N \setminus N \setminus \{p\}$ гомеоморфно $[\aleph_1]_{\aleph_0}$, которое ненормально в силу теоремы 3.

Пусть $\{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ — совокупность открыто-замкнутых окрестностей P -точки p в $\beta N \setminus N$, убывающих и образующих базу этой точки. Можно проверить, что если $p_\alpha \in A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}$, p_α — P -точка, то $[M]_{\leq \aleph_0}$ гомеоморфно $[M_\alpha]_{\leq \aleph_0}$ (где $M = \{p_\alpha: \alpha < \omega_1\}$), которое ненормально по предложению 2. Но $[M]_{\leq \aleph_0}$ лежит замкнуто в $N^* \setminus \{p\} = \beta N \setminus N \setminus \{p\}$. Следовательно, $\beta N \setminus N \setminus \{p\}$ ненормально, что дает еще одно доказательство этого (кроме следствия 1).

Приведем несколько нерешенных задач, связанных с тематикой данной статьи.

1) Найти точку $x \in \beta N \setminus N$, для которой $\beta N \setminus \{x\}$ ($\beta N \setminus N \setminus \{x\}$) ненормально (не прибегая к теоретико-множественным гипотезам).

2) То же для высших кардиналов.

3) Доказать, что $t(\{x\}, \beta X) > \Delta x$ для любой точки $x \in \beta X \setminus X$. Если $\Delta x = \aleph_0$, то это так ⁽⁴⁾.

Примечание при корректуре. Автору стала известна работа ⁽⁵⁾, в которой содержится частный случай теоремы 2 (а также следствие 1) при $n = \aleph_1$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ W. W. Comfort, S. Negrepoutis, Math. Zs., 107, № 1 (1968). ² А. В. Архангельский, ДАН, 206, № 2 (1972). ³ W. Rudin, Duke Math., 23, № 3, 409 (1956). ⁴ В. И. Малыгин, ДАН, 206, № 6 (1972). ⁵ M. Warren Mancy, Proc. Am. Math. Soc., 33, 599 (1972).

* ε_1 — первый регулярный кардинал такой, что если $n < \varepsilon_1$, то $2^n < \varepsilon_1$.