

Г. П. НЕВАИ (ВЕНГРИЯ)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОНОРМАЛЬНЫХ С ВЕСОМ $(1+x^{2k})^\alpha e^{-x^{2k}}$, И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 24 XI 1972)

Пусть $v(x)$ — некоторая весовая функция, определенная на всей вещественной оси. Обозначим через $p_n(v, x)$, $n=0, 1, 2, \dots$, многочлены, ортонормальные с весом $v(x)$ на оси; $\psi_n(v, x, \xi) = p_{n-1}(v, \xi)p_n(v, x) - p_n(v, \xi)p_{n-1}(v, x)$, $n=1, 2, \dots$, — квазиортогональные многочлены от переменной x ; ξ^* — ближайший к точке ξ корень $\psi_n(v, x, \xi)$, расположенный между точками 0 и ξ (если такого ξ^* не существует, то положим $\xi^* = 0$).

В настоящей заметке мы дадим оценку сверху для функций Кристоффеля

$$\lambda_n(v, \xi) = \left[\sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(v, \xi) \right]^{-1}, \quad n=1, 2, \dots,$$

и для расстояния между нулями квазиортогональных многочленов $\Delta_n(v, \xi) = |\xi - \xi^*|$, $n=1, 2, \dots$, если весовая функция равняется $w(\alpha, k, x) = (1+x^{2k})^\alpha e^{-x^{2k}}$, $k=1, 2, \dots$; $\alpha \geq 0$.

Обозначим через P_n , $n=1, 2, \dots$, совокупность всех вещественных алгебраических полиномов $\pi_n(x)$ степени ниже n , $P_n(t)$ состоит из тех полиномов $\pi_n(x) \in P_n$, для которых $\pi_n(t) \neq 0$; далее некоторое число со штрихом будет означать целую часть половины данного числа. Под s и a будем понимать положительные конечные постоянные, зависящие лишь от параметров k и α . Константы c даже в одной и той же формуле могут принимать различные значения.

Теорема 1. Пусть k — натуральное, α — неотрицательное числа, оба фиксированные. Тогда при $|\xi| < cn^{1/(2k)}$ имеем

$$\lambda_n(w, \xi) \leq cn^{-1+1/(2k)} w(\alpha, k, \xi), \quad (1a)$$

$$\Delta_n(w, \xi) \leq cn^{-1+1/(2k)}. \quad (1b)$$

Отметим, что для случая $\alpha=0$ неравенство (1a) доказано в ⁽¹⁾, а (1b) — в ⁽²⁾. На основе общих свойств ортогональных многочленов теорему 1 легко вывести из следующего предложения. Пусть $u(\alpha, k, x) = 0$ при $-\infty < x \leq 0$ и $u(\alpha, k, x) = x^{-1/2} w(\alpha, k, \sqrt{x})$ при $0 < x < \infty$.

Теорема 1'. Если $0 \leq \xi < cn^{1/k}$, то тогда

$$\lambda_n(u, \xi) \leq cn^{-1+1/(2k)} w(\alpha, k, \sqrt{\xi}), \quad (2a)$$

$$\Delta_n(u, \xi) \leq c\sqrt{\xi} n^{-1+1/(2k)}. \quad (2b)$$

Лемма. Существуют полиномы ρ_n и τ_n из P_n , для которых

$$1/3 e^x \leq \rho_n(x), \quad 0 \leq x \leq e^{-3n}, \quad 0 \leq \rho_n(x) \leq e^x, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (3)$$

$n=1, 2, \dots$, и при всех $\varepsilon > 0$

$$1/2 (1+x)^{-\alpha/2} \leq \tau_n(x) \leq 2(1+x)^{-\alpha/2}, \quad 0 \leq x \leq \varepsilon n, \quad (4)$$

если только $n > n_0(\alpha, \varepsilon)$.

Доказательство. Легко видеть, что $\rho_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!}$ удовлетворяет неравенствам (3). Рассмотрим теперь функцию $\varphi(x) = (1+x^2)^{-\alpha/2}$. В силу теоремы Джексона, примененной к отрезку $[-\sqrt{\varepsilon n}, \sqrt{\varepsilon n}]$, при всех $n = 1, 2, \dots$ существует такой четный полином $\tau_n(x) \in P_n$, что

$$|\varphi(x) - \tau_n(x)| \leq d n^{-(\alpha+1)/2} \sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi^{(\alpha+2)}(x)|, \quad |x| \leq \sqrt{\varepsilon n},$$

где d зависит лишь от α и ε . Полагая $\tau_n(x) = \hat{\tau}_{2n}(\sqrt{x})$, легко получить (4), ибо все производные функции $\varphi(x)$ ограничены.

Доказательство (2а). Исходим из известного представления (см. (3))

$$\lambda_n(u, \xi) = \min_{\pi_n \in P_n(\xi)} \pi_n^{-2}(\xi) \int_0^\infty \pi_n^2(x) u(\alpha, k, x) dx. \quad (5)$$

В (1) доказано, что

$$\int_{cn^{1/k}}^\infty \pi_m^2(x) x^{-1/2} e^{-x^k} dx \leq e^{-cm} \int_0^{cn^{1/k}} \pi_m^2(x) x^{-1/2} e^{-x^k} dx, \quad \pi_m \in P_m.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \pi_n^2(x) u(\alpha, k, x) dx &\leq \int_0^{cn^{1/k}} \pi_n^2(x) u(\alpha, k, x) dx + \\ &+ \int_{cn^{1/k}}^\infty \pi_n^2(x) (1+x^k)^{2\alpha'+2} x^{-1/2} e^{-x^k} dx \leq \\ &\leq \int_0^{cn^{1/k}} \pi_n^2(x) u(\alpha, k, x) dx + e^{-cn} \int_0^{cn^{1/k}} \pi_n^2(x) (1+x^k)^{2\alpha'+2} x^{-1/2} e^{-x^k} dx \leq \\ &\leq 2 \int_0^{an^{1/k}} \pi_n^2(x) u(\alpha, k, x) dx, \quad n > n_1(k, \alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Из формул (3)–(6) следует, что

$$\lambda_n(u, \xi) \leq cw(\alpha, k, \sqrt{\xi}) \min_{\pi_n \in P_n(\xi)} \pi_n^{-2}(\xi) \int_0^{an^{1/k}} \pi_n^2(x) x^{-1/2} dx, \quad 0 \leq \xi < cn^{1/k};$$

значит,

$$\begin{aligned} \lambda_n(u, \xi) &\leq c \sqrt{a} n^{1/(2k)} w(\alpha, k, \sqrt{\xi}) \min_{\pi_n \in P_n(\xi)} \pi_n^{-2}(\xi) \times \\ &\times \int_{-1}^0 \pi_n^2(an^{1/k}(x+1)) (x+1)^{-1/2} dx \leq cn^{1/2k} w(\alpha, k, \sqrt{\xi}) \times \\ &\times \min_{\pi_n \in P_n(\xi a^{-1} n^{-1/k} - 1)} \pi_n^{-2}(\xi a^{-1} n^{-1/k} - 1) \int_{-1}^1 \pi_n^2(x) (1-x^2)^{-1/2} dx, \quad 0 \leq \xi < cn^{1/k}. \end{aligned}$$

Этот последний минимум равняется значению в точке $\xi a^{-1} n^{-1/k} - 1$ n' -й функции Кристоффеля веса Чебышева $v(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, $|x| \leq 1$, о котором известно, что оно не превосходит cn^{-1} , если только $|\xi a^{-1} n^{-1/k} - 1| \leq 1$ (см. (3)). Таким образом, неравенство (2а) доказано.

Доказательство (2б). По неравенству Поссе (см. (3)) мы имеем при $\xi^* > 0$

$$\int_{\xi^*}^{\xi} x^{-1/2} (1+x^k)^\alpha dx \leq e^{\xi^* k} \lambda_n(u, \xi^*) + e^{\xi k} \lambda_n(u, \xi),$$

значит, в силу неравенства (2а),

$$\int_{\xi^*}^{\xi} x^{-1/2} (1+x^k)^{\alpha} dx \leq c (1+\xi^k)^{\alpha} n^{-1+1/(2k)}, \quad 0 < \xi < cn^{1/k}. \quad (7)$$

Если $\xi^* \geq 1/2 \xi$, то отсюда непосредственно вытекает (2б), если же $0 < \xi^* < 1/2 \xi$, то в силу (7)

$$\int_{\xi/2}^{\xi} x^{-1/2} (1+x^k)^{\alpha} dx \leq c (1+\xi^k)^{\alpha} n^{-1+1/(2k)}, \quad 0 < \xi < cn^{1/k},$$

т.е. $\sqrt{\xi} < cn^{-1+1/(2k)}$, и тем более справедливо (2б). Если же $\xi^* = 0$, то $\xi < x_2$, где $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ — корни $p_n(u, x)$. Далее, согласно теории моментов Гамбургера — Стильеса (см. (3)), $0 < x_2 < 1$ при $n > n_2(k, \alpha)$. Отсюда по неравенству Маркова — Стильеса (см. (3)) и по (2а)

$$\sqrt{\xi} < \sqrt{x_2} < c \int_0^{x_k} u(\alpha, k, x) dx < c \sum_{j=1,2} \lambda_n(u, x_j) < cn^{-1+1/(2k)},$$

и (2б) доказано и для случая $\xi^* = 0$.

Укажем теперь два применения теоремы 1 в теории приближения алгебраическими полиномами. Ниже под $\|\cdot\|$ будем понимать обычную норму в $L_1 = L_1(-\infty, \infty)$, а $w(x) = w(\alpha, k, x) = (1+x^{2k})^{\alpha} e^{-x^{2k}}$.

Пусть измеримая функция $F(x)$ такова, что $Fw \in L_1$. Обозначим через

$$\varepsilon_n^1(w, F) = \inf_{\pi_n \in \mathbf{P}_n} \|(F - \pi_n)w\|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

меру наилучшего взвешенного L_1 -приближения функции $F(x)$ при помощи полиномов из $\mathbf{P}_n$, а через

$$\omega^1(w, F, \delta) = \max_{0 \leq t \leq \delta} \|F(\cdot + t)w(\cdot + t) - Fw\| + \|\tau(\cdot \delta^{1/(2k+1)})^{2k-1} Fw\|,$$

$\delta > 0$; $\tau(x) = \min(1, |x|)$, обобщенный взвешенный L_1 -модуль непрерывности функции $F(x)$.

Теорема 2. Пусть $k = 1, 2, \dots$ и $\alpha \geq 0$ фиксированы и $F(x) - r = 0, 1, \dots$ раз интегрированная примитивная функция от $F^{(r)}(x)$. Если $F^{(r)}w \in L_1$, то тогда

$$\varepsilon_n^1(w, F) \leq e_1^{(c+\tau)} n^{-r(1-1/(2k))} \omega^1(w, F^{(r)}, n^{-1+1/(2k)}), \quad n > r.$$

Теорема 3. Пусть k, α и $F(x)$ такие же, как и выше. Пусть далее функция $F^{(r)}(x)$ имеет ограниченное изменение на вязком конечном интервале и

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\alpha, k, x) |dF^{(r)}(x)| < \infty.$$

Если $|F(x)| < c(1+x^{2s})$ ($-\infty < x < \infty$; s фиксированное натуральное), то тогда для всех $n(>2s)$ существуют такие два полинома p_n и P_n из $\mathbf{P}_n$, что

$$p_n(x) \leq F(x) \leq P_n(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

и

$$\|[P_n - p_n]w\| \leq bn^{-(1-1/(2k))(r+1)},$$

где константа b не зависит от n .

Для частного случая $\alpha = 0$ теорема 2 доказана в (1), а теорема 3 — в (2).

Математический институт
Венгерской Академии наук
Будапешт

Поступило
16 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ G. Freud, *Studia Math.*, № 2, 42 (1972). ² G. Freud, G. P. Névai, *Acta Sci. Math. (Szeged)* (in press). ³ G. Freud, *Orthogonale Polynome*, Budapest, 1969.