Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 6

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

М. И. ЯДРЕНКО

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНКАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ ИЗОТРОПНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 9 X 1972)

Пусть $SO(n)$ — группа вращений в n-мерном эвклидовом пространстве R^n вокруг начала координат O. Случайное поле $\eta(x)$ на R^n такое, что $M|\eta(x)|^2 < +\infty$, называется **изотропным случайным полем** (и.с.п.), если $M\eta(x)$ зависит только от расстояния между O и x (будем в дальнейшем считать, что $M\eta(x) = 0$) и

$$M\eta(gx_1)\overline{\eta(gx_2)} = M\eta(x_1)\overline{\eta(x_2)} \tag{1}$$

при каждом $g \in SO(n)$.

Предположим, что $\eta(x)$ непрерывно в среднем квадратичном. Пусть S_n — единичная сфера в R^n, (r, u), $u \in S_n$, — сферические координаты точки x, $S_m^l(u)$ — ортонормированные сферические гармоники степени m [1],

$$h(m, n) = (2m + n - 2)\frac{(m + n - 3)!}{(n - 2)!\, m!} \tag{2}$$

— число линейно независимых сферических гармоник степени m, ω_n — площадь поверхности S_n.

В [2] показано, что и.с.п. представимо в виде

$$\eta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{h(m,n)} \eta_m^l(r) S_m^l(u), \tag{3}$$

где

$$M\eta_m^l(r)\, \eta_{m'}^{l'}(s) = \delta_m^{m'} \delta_l^{l'} b_m(r, s), \tag{4}$$

$b_m(r, s)$ — последовательность положительно определенных ядер на $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ такая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) b_m(r, s) < +\infty. \tag{5}$$

Корреляционная функция и.с.п. $\eta(x)$ имеет вид

$$M\eta(x)\overline{\eta(y)} = B(r, s, \cos\theta) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\theta)}{C_m^{(n-2)/2}(1)} b_m(r, s), \tag{6}$$

где θ — угол между радиус-векторами точек x и y, $C_m^{(n-2)/2}(x)$ — многочлены Гегенбауэра. И.с.п. $\eta(x)$ является однородным и изотропным тогда и только тогда, когда

$$b_m(r, s) = c_n^2 \int_0^{+\infty} \frac{J_{m+(n-2)/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{(n-2)/2}} \frac{J_{m+(n-2)/2}(\lambda s)}{(\lambda s)^{(n-2)/2}} d\Phi(\lambda), \tag{7}$$

где $J_\nu(x)$ — бесселева функция первого рода, $\Phi(\lambda)$ — неубывающая функция, $c_n^2 = 2^{n-1}\Gamma(n/2)\pi^{n/2}$.

Предположим, что на сфере $S_n(r)$ радиуса r в R^n наблюдается случайное поле

$$\xi(r, u) = \sum_{s=1}^{N} a_s g_s(r, u) + \eta(r, u), \tag{8}$$

где a_s, $s = 1, \ldots, N$,— неизвестные параметры, $g_s(r, u)$ — известные функции, линейно независимые на $S_n(r)$, $\eta(x)$ — и.с.п. В заметке сформулированы некоторые результаты относительно оценок a_s линейных, несмещенных, имеющих минимальные дисперсии (в дальнейшем для краткости такие оценки будем называть оптимальными).

Пусть $\mathscr{H}_\xi(r)$ — замкнутое линейное многообразие, порожденное случайными величинами $\xi(r, u)$, $u \in S_n$, а H_r — гильбертово пространство последовательностей

$$\mathbf{c} = \left\{c_m^l\colon m = 0, 1, \ldots; l = 1, \ldots, h(m, n);\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} [c_m^l]^2 < +\infty\right\}$$

со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} c_{m1}^l \bar{c}_{m2}^l b_m(r, r).$$

Лемма. *Каждая случайная величина $\gamma \in \mathscr{H}_\xi(r)$ имеет вид*

$$\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l \xi_m^l(r), \tag{9}$$

где $\mathbf{c} = \{c_m^l\} \in H_r$. Соответствие $\gamma \leftrightarrow \mathbf{c}$ является унитарным изоморфизмом между $\mathscr{H}_\xi(r)$ и H_r.

Пусть

$$g_{ms}^l(r) = \int_{S_n} g_s(r, u) S_m^l(u)\, m_n(du),$$

где $m_n(du)$ — лебегова мера на S_n, $\mathbf{d}_s = \left\{\dfrac{g_{ms}^l(r)}{b_m(r,r)}\right\}$. Предположим, что

$$\mathbf{d}_s \in H_r, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

Теорема 1. *Если выполнено предположение* (10), *то оптимальная оценка a_i имеет вид*

$$\hat{a}_i = \sum_{s=1}^{N} \alpha_{si} \int_{S_n} \xi(r, u)\, l_s(r, u)\, m_n(du), \tag{11}$$

где α_{si} определяется из системы линейных уравнений

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha_{si} \langle \mathbf{d}_s, \mathbf{d}_i \rangle = \delta_i^j, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

а

$$l_s(r, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \frac{g_{ms}^l(r)}{b_m(r, r)} S_m^l(u). \tag{13}$$

Дисперсия $\hat{a}_i$ равна $D\hat{a}_i = \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i \rangle$, где

$$\mathbf{c}_i = \sum_{s=1}^{N} \alpha_{si} \mathbf{d}_s.$$

В частности, если $N = 1$, то

$$\hat{a}_1 = \frac{\int\limits_{S_n} \xi(r, u)\, l_1(r, u)\, m_n(du)}{\langle \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_1 \rangle}, \tag{14}$$

$$D\hat{a}_1 = 1 / \langle \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_1 \rangle. \tag{15}$$

Если $g(r, u) = g(r)$ зависит только от r, то формулы (14) и (15) принимают более простой вид:

$$\hat{a} = \frac{1}{g(r)} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S_n} \xi(r, u)\, m_n(du), \tag{16}$$

$$D\hat{a} = \frac{1}{\omega_n} \frac{b_1(r, r)}{g^2(r, r)}. \tag{17}$$

При $N = 1$ и $g(r, u) = 1$ рассмотренная задача превращается в задачу оценки неизвестного среднего.

Теорема 2. *Среди всех линейных несмещенных оценок неизвестного среднего и.с.п. $\xi(r, u)$, наблюдаемого на $S_n(r)$, наименьшую дисперсию имеет оценка*

$$\hat{a}(r) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S_n} \xi(r, u)\, m_n(du). \tag{18}$$

Дисперсия этой оценки равна

$$D\hat{a} = b_0(r, r) / \omega_n. \tag{19}$$

Как известно, оптимальные оценки неизвестного среднего случайного процесса, наблюдаемого на отрезке, зависят, вообще говоря, от вида корреляционной функции; построение таких оценок связано с решением некоторого интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Представляется интересным то обстоятельство, что в рассмотренном случае оптимальная оценка имеет простой вид и не зависит от вида корреляционной функции $\eta(r, u)$.

Предположим, что $\eta(r, u)$ — однородное и изотропное случайное поле. Тогда

$$D\hat{a}(r) = 2^{n-2}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int\limits_0^{+\infty} \frac{J_{(n-2)/2}(\lambda r)}{(\lambda r)^{n-2}}\, d\Phi(\lambda).$$

Естественно поставить вопрос о поведении $D\hat{a}(r)$ при увеличении радиуса сферы. Ответ можно получить, используя результаты ([3]).

Теорема 3. *Если функция $\Phi(\lambda)$ абсолютно непрерывна и $\Phi'(\lambda) = \lambda^\alpha g(\lambda)$, где $0 \leqslant \alpha < n$, $g(\lambda)$ ограничена и непрерывна в нуле ($g(0) \neq 0$), то*

$$D\hat{a}(r) = g(0) \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma(n-\alpha)\, \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{2^{n-\alpha}\Gamma^2\left(\frac{n-\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2n-\alpha+1}{2}\right)} \frac{1}{r^{1+\alpha}} + o\left(\frac{1}{r^{1+\alpha}}\right).$$

Предположим, что случайное поле $\xi(r, u)$ наблюдается на системе из p концентрических сфер с центром в O и радиусами $r_1, \ldots, r_p$. Пусть Δ — определитель матрицы $\|b_0(r_i, r_k)\|$, а определитель Δ_i получается из Δ заменой всех элементов i-го столбца на 1.

Теорема 4. *Оптимальная оценка а имеет вид*

$$\hat{a} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\Delta_i}{\sum\limits_{s=1}^{p} \Delta_s} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S_n} \xi(r_i, u)\, m_n(du),$$

причем

$$D\hat{a} = \frac{1}{\omega_n} \frac{\Delta}{\sum_{s=1}^{p} \Delta_s}.$$

Теорема 5. *Если и.с.п. $\xi(r, u)$ на плоскости наблюдается в вершинах правильного q-угольника, вписанного в окружность радиуса r, то оптимальная оценка a представляет собой среднее арифметическое результатов наблюдения и*

$$D\hat{a} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{qk}(r, r).$$

Предположим, что случайное поле (8) наблюдается на $S_n(r)$, но $a_1, \ldots, a_N$ — теперь неизвестные случайные величины с известной совместной функцией распределения $F(x_1, \ldots, x_N)$, а $\eta(r, u)$ — гауссовское и.с.п. Как известно (см., например, ([4])), условное математическое ожидание $\tilde{a}_i = M\{a_i / \xi(r, u), u \in S_n\}$ является несмещенной (вообще говоря, нелинейной) оценкой a_i с минимальной среднеквадратической погрешностью.

Теорема 6. *Если выполнены предположения* (10), *то*

$$\tilde{a}_i = \frac{\int \cdots \int x_i \exp\left\{\sum_{s=1}^{N} x_s \int_{S_n} l_s(r, u)\,\xi(r, u)\, m_n\, du - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{N} b_{kj}(r)\, x_i x_j\right\} dF(x_1, \ldots, x_N)}{\int \cdots \int \exp\left\{\sum_{s=1}^{N} x_s \int_{S_n} l_s(r, u)\,\xi(r, u)\, m_n(du) - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{N} b_{kj}(r)\, x_i x_j\right\} dF(x_1, \ldots, x_N)},$$

где $b_{kj} = \langle \mathbf{d}_k, \mathbf{d}_j \rangle$.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
3 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 2, М., 1966. [2] М. И. Ядренко, Теория вероятностей и математическая статистика, в. 1, 240 (1970). [3] Ю. Д. Попов, М. И. Ядренко, Теория вероятностей и ее применение, 14, № 3, 531 (1969). [4] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, М., 1965.