Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 4

УДК 517.927.26 *МАТЕМАТИКА*

М. ОТЕЛБАЕВ

К МЕТОДУ ТИТЧМАРША ОЦЕНКИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 XI 1972)

Для получения асимптотики распределения собственных чисел оператора Шредингера Титчмарш дал мощный метод (см. ([1]), стр. 216—224), который затем развивался и обобщался в некоторых работах Б. М. Левитана и других авторов ([2], [3]). Главным элементом этого метода является соответствующая оценка резольвенты, которая доказывалась обычно при ряде условий на потенциал («условии Титчмарша»). Основной результат настоящей работы состоит в том, что нам удалось снять одно из этих условий, а также доказать, что в условиях метода Титчмарша имеет место самосопряженность. Последний факт в общем случае не был известен (например, в случае операторного уравнения).

1. Пусть потенциал $q(x)$ удовлетворяет условиям:

$$q(x)=\overline{q(x)},\quad \inf_{x\in J} q(x)=-\mu_0+1>-\infty,\quad J=(-\infty,+\infty); \tag{I}$$

$$\sup_{|x-y|\leqslant 1}\{(q(x)+\mu_0)^{-a}|x-y|^{-\alpha}|q(x)-q(y)|\exp(-r|x-y|\sqrt{q(x)+\mu_0})\}<\infty, \tag{II}$$

где $\alpha\in[0,1]$, $r\in[0,1)$, $2-2a+\alpha>0$, $a\geqslant 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(q(x)+\mu_0)^{-\gamma}dx<+\infty,\quad \gamma\in(0,+\infty). \tag{III}$$

Обозначим через A замыкание оператора, заданного равенством

$$Ay=-y''+q(x)y \tag{1}$$

на $C_0^\infty(J)$ в пространстве $L_2(J)$.

Напомним, что через $\mathfrak{S}_p$, $p\geqslant 1$, обозначают (см. ([4])) класс вполне непрерывных операторов, для которых сумма p-х степеней s-чисел сходится, и если $T\in\mathfrak{S}_p$, то полагают

$$\|T\|_{\mathfrak{S}_p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}s_n^p(T)\right)^{1/p},$$

где $s_n(T)$, $n=1,2,\ldots$, суть s-числа оператора T.

Положим

$$M(x,\eta,\lambda)=0{,}5(q(x)+\lambda)^{-1/2}\exp(-|x-\eta|\sqrt{q(x)+\lambda}). \tag{2}$$

Оператор, порожденный этим ядром, обозначим через $M(\lambda)$,

$$M(\lambda)y=\int_{-\infty}^{\infty}M(x,\eta,\lambda)y(\eta)\,d\eta. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (I)—(III). *Тогда, если* $M(\mu_0)\in\mathfrak{S}_p$, $p>2$, *то справедлива асимптотическая формула*

$$\|(A+\lambda E)^{-1}\|_{\mathfrak{S}_p}=\|M(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_p}\ (1+O(\lambda^{-\beta/2})),\quad \lambda\to+\infty, \tag{4}$$

где E — единичный оператор $\beta\in(0,2+\alpha-2a)$.

Оценки типа (4) были доказаны в ([1-3]). Но в этих работах, помимо условий вида (I), (II) и (III), предполагалось еще условие совсем иного вида («условие на рост»):

$$\sup_{|x-y|\geqslant 1} |q(x)\exp(-{}^1/_2\sqrt{q(x)+\mu_0}\,|x-y|)| < +\infty. \qquad (5)$$

Величину $\|M(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_p}$ при $p=2$ и при $p=4k$, $k=1, 2, \ldots$, можно вычислить точно (через ядра операторов $M(\lambda)$ и $M^*(\lambda)$). Поэтому при $p=2$ и при $p=4k$, $k=1, 2, \ldots$ из (4) получаем асимптотические формулы для сумм вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_n+\lambda)^{-p}$, $\lambda\to+\infty$, где λ_n, $n=1, 2, \ldots$,— собственные числа оператора A. Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n+\lambda)^{-2} = \frac{1}{4}(1+O(\lambda^{-\beta/2}))\int_{-\infty}^{\infty}(q(x)+\lambda)^{-3/2}\,dx.$$

Эти формулы сводят задачу о распределении собственных чисел к известным Тауберовым теоремам (см. ([1]), стр. 220, 442). Теорема 1 допускает обобщение на случай многомерных дифференциальных операторов вида $B+q(x)$, где B — формально самосопряженный дифференциальный гипоэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, а $q(x)$ удовлетворяет условиям, аналогичным (I), (II), (III), со своими постоянными α, r и a, которые зависят от порядка оператора B и количества переменных.

Теорема 1 обобщается также на случай операторного уравнения $-y''+Q(x)y=\lambda y$, если $Q(x)$ удовлетворяет условиям:

$$Q(x)=Q^*(x), \quad Q(x)\geqslant -\mu_0E+E, \quad \mu_0<+\infty, \qquad (\mathrm{I}')$$

$$\sup_{|x-y|\leqslant 1}\|(Q(x)+\mu_0E)^{-a}|x-y|^{-\alpha}\exp(-r\sqrt{Q(x)+\mu_0E})(Q(x)-Q(y))\|<+\infty, \qquad (\mathrm{II}')$$

где $\alpha\in[0, 1]$, $r\in[0, 1)$, $2+\alpha-2a>0$, $a\geqslant 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|(Q(x)+\mu_0E)^{-1}\|_{\mathfrak{S}_p}^{\gamma}\,dx<+\infty. \qquad (\mathrm{III}')$$

Доказательство теоремы 1 построено так, что дословно годится как для операторного уравнения, так и для многомерного уравнения. По ходу доказательства теоремы 1 получаем, что оператор A есть самосопряженный оператор. Это также справедливо для многомерного и операторного уравнения *.

Аналогично можно поступить и в случае оператора Дирака, и результаты Саргсяна ([5]), касающиеся распределения собственных чисел, остаются верными, если сохранить все его ограничения на потенциальную матрицу, за исключением ограничений вида (5).

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $r_1(t)$ и $r_2(t)$ — две бесконечно гладкие функции такие, что

$$r_1(t)+r_2(t)=1, \quad r_1(t)=\begin{cases}1 & \text{при } |t|\leqslant 0,4,\\ 0 & \text{при } |t|\geqslant 0,8.\end{cases} \qquad (6)$$

Обозначим через $M_1(\lambda)$, $M_2(\lambda)$ и $M_3(\lambda)$ интегральные операторы соответственно с ядрами

$$M_1(x, \eta, \lambda)=M(x, \eta, \lambda)(q(x)-q(y))r_1(\eta-x),$$
$$M_2(x, \eta, \lambda)=M(x, \eta, \lambda)r_2(\eta-x),$$
$$M_3(x, \eta, \lambda) = -2M'_\eta(x, \eta, \lambda)\,r'_{1\eta}(\eta-x)-M(x, \eta, \lambda)\,r''_{\eta\eta}(\eta-x).$$

---

* В случае операторного уравнения для самосопряженности A достаточны условие (I′) и непрерывность $Q(\eta)e^{-Q(x)}$ по совокупности переменных (η, x) в некоторой окрестности диагонали, а в случае многомерного скалярного уравнения достаточно лишь одно условие вида (I).

Оценим величины $\|M_1(\lambda)\|$, $\|M_2(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_p}$, $\|M_3(\lambda)\|$ при $\lambda\to+\infty$. Из явного вида ядра $M_2(x,\eta,\lambda)$ и условия (III) получаем

$$\|M_2(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}M_2^2(x,\eta,\lambda)\,dx\,d\eta=O\Big(\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{0,4}^{\infty}2^{-2t\sqrt{q(x)+\lambda}}dt\Big)=O(2^{-\sqrt{\lambda}/10}).$$

Отсюда видно, что $\|M_2(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}\leqslant 1$ при больших λ. Поэтому

$$\|M_2(\lambda)\|^p_{\mathfrak{S}_p}\leqslant\|M_2(\lambda)\|^2_{\mathfrak{S}_2},\quad \|M_2(\lambda)\|^p_{\mathfrak{S}_p}=O(2^{-\sqrt{\lambda}/10}). \tag{7}$$

Аналогично

$$\|M_3(\lambda)\|=O(2^{-\sqrt{\lambda}/10}). \tag{8}$$

Для любого $y(x)\in C_0^\infty(J)$ имеем:

$$\|M_1(\lambda)y\|^2\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}dx\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|M_1(x,\eta,\lambda)y(\eta)|\,d\eta\Big)^2. \tag{9}$$

Возьмем произвольное число $\gamma\in(0{,}2+\alpha-2a)\cap(0{,}1)$ и положим $\varepsilon=1-\gamma$, $\beta=2+\alpha-2a-\gamma$. Так как $\sup\limits_{t\in J}|t|^{\alpha+\varepsilon}\exp(-|t|)<\infty$, то из явного вида ядра $M_1(x,\eta,\lambda)$, условия (II) и неравенства (9) следует

$$\|M_1(\lambda)y\|^2=O(1)\int_{-\infty}^{\infty}dx\Big(\int_{|x-\eta|\leqslant1}M(x,\eta,\lambda)\exp(r|x-\eta|)\times$$
$$\times\sqrt{q(x)+\mu_0}\,|q(x)|^a\,|y(\eta)|\,|x-\eta|^a\,d\eta\Big)^2=$$
$$=O(\lambda^{-\beta})\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{|x-\eta|\leqslant1}|y(\eta)|\,|x-\eta|^{-\varepsilon}\Big)^2dx=$$
$$=O(\lambda^{-\beta})\int_{|\eta_1|\leqslant1}|\eta_1|^{-\varepsilon}d\eta_1\int_{|\eta_2|\leqslant1}|\eta_2|^{-\varepsilon}d\eta_2\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|y(x+\eta_1)y(x+\eta_2)|\,dx\Big)=$$
$$=O(\lambda^{-\beta})\|y\|^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|M_1(\lambda)\|^2=\sup_{y\in C_0^\infty(J)}\|M_1(\lambda)y\|^2\|y\|^{-2}=O(\lambda^{-\beta}). \tag{10}$$

Докажем теперь, что при $\lambda\gg1$ верна формула

$$(E-M_1(\lambda)-M_3(\lambda))(B+\lambda E)^{-1}=M(\lambda)-M_2(\lambda), \tag{11}$$

где B — произвольное полуограниченное самосопряженное расширение оператора A. Для этого, в силу (7), (8) и (10), достаточно показать, что для любой функции $q(x)\in C_0^\infty(J)$ выполнено равенство

$$(B+\lambda E)^{-1}(E-M_1^*(\lambda)-M_3^*(\lambda))g=M^*(\lambda)g-M_2^*(\lambda)g. \tag{12}$$

Пользуясь явным видом операторов $M(\lambda)$, $M_1(\lambda)$, $M_2(\lambda)$, $M_3(\lambda)$ и учитывая, что $r_2(\eta-x)\equiv0$ при $|x-\eta|\leqslant0{,}4$ и $M_{\eta\eta}''(x,\eta,\lambda)=(q(x)+\lambda)M(x,\eta,\lambda)$ при $\eta\neq x$, получаем: $M_2^*(\lambda)g\in D(A)$ и

$$M_1^*(\lambda)g=-(g(\eta)+\lambda E)(M^*(\lambda)-M_2^*(\lambda))g+\int_{x-\eta}M_{\eta\eta}''(x,\eta,\lambda)r_1(\eta-x)\times$$
$$\times g(x)\,dx+\int_{x>\eta}M_{\eta\eta}''(x,\eta,\lambda)r_1(\eta-x)g(x)\,dx=$$
$$=-(q(\eta)+\lambda E)(M^*(\lambda)-M_2^*(\lambda))g+g(\eta)+$$
$$+\Big(\int_{x<\eta}M(x,\eta,\lambda)r_1(\eta-x)g(x)\,dx\Big)_{\eta\eta}''+$$
$$+\Big(\int_{x>\eta}M(x,\eta,\lambda)r_1(\eta-x)g(x)\,dx\Big)_{\eta\eta}''-M_3^*(\lambda)g.$$

Следовательно, $M^*(\lambda)g \in D(A)$ и

$$M_1^*(\lambda)g = g(\eta) - (A + \lambda E)(M^*(\lambda) - M_2^*(\lambda)) - M_3^*(\lambda)g.$$

Отсюда и из (12), поскольку при $f \in D(A)$ верно равенство $f = (B + \lambda E)^{-1}(A + \lambda E)f$, следует равенство (12). Тем самым равенство (11) также доказано.

Из (11) и оценок (7), (8) и (10) следует, что все полуограниченные расширения оператора A совпадают. В таком случае из (11) и теоремы 2 из ([6]) получаем $A = A^*$ и

$$(A + \lambda E)^{-1} - M(\lambda) = -M_2(\lambda) + (M_1(\lambda) + M_3(\lambda))(A + \lambda E)^{-1}.$$

Из этого равенства и предложения 8.2.8 из ([7]) получаем

$$\|(A + \lambda E)^{-1} - M(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant \|M_2(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_p} + (\|M_1(\lambda)\| + \|M_3(\lambda)\|)\|A + \lambda E)^{-1}\|_{\mathfrak{S}_p}. \tag{13}$$

Заметим, что при $\lambda > \lambda_0$ имеет место неравенство $\|(A + \lambda E)^{-1}\|_{\mathfrak{S}_p}^p \geqslant (\lambda + \lambda_0)^{-p}$, где λ_0 — наименьшее собственное число оператора A, поэтому из оценок (7), (8), (10) и (13) вытекает равенство

$$\|(A + \lambda E)^{-1} - M(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_p} = O(\lambda^{-\beta/2})\|(A + \lambda E)^{-1}\|_{\mathfrak{S}_p}, \qquad \lambda \to +\infty.$$

Из этой формулы и неравенства треугольника следует теорема 1.

В заключение автор приносит благодарность В. В. Жикову и Б. М. Левитану за ценные указания и внимание к работе.

Поступило
30 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, 2, ИЛ, 1961. [2] Б. М. Левитан, Матем. сборн., 76 (118), 2 (1968). [3] А. Г. Костюченко, Б. М. Левитан, Функциональн. анализ и его прилож., 1, в. 1, 86 (1967). [4] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1965. [5] И. С. Саргсян, Докторская диссертация, МГУ, 1969. [6] А. Пич, Ядерные выпуклые пространства, М., 1967.