Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 4

УДК 533.9.01; 533.951.8 ФИЗИКА

Т. К. СОБОЛЕВА

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДРЕЙФОВО-ДИССИПАТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТНО-ЗВУКОВОЙ ВОЛНОЙ

(Представлено академиком Б. Б. Кадомцевым 26 X 1972)

В настоящее время одной из наиболее точно идентифицированных неустойчивостей является дрейфово-диссипативная неустойчивость, которая наблюдалась при магнитном удержании плазмы в установках с плазмой щелочных металлов, называемых также Q-машинами. Дрейфово-диссипативная неустойчивость в установках такого типа является поэтому удобным объектом для проверки различных способов стабилизации. Такие исследования проводились, например, по стабилизации дрейфово-диссипативной неустойчивости путем создания высокочастотных осцилляций магнитных силовых линий внешнего поля ([1]), причем было обнаружено хорошее согласие экспериментальных результатов с предсказаниями теории ([2]).

Проведенные в последнее время эксперименты по нагреву в системе «Токамак» за счет создания магнитно-звукового резонанса ([9]) свидетельствуют об увеличении энергетического времени жизни, что может быть связано с эффективным нагревом. С другой стороны, энергетическое время жизни могло увеличиться за счет стабилизации магнитным звуком наиболее опасных неустойчивостей, приводящих к выносу тепла на стенки системы, например, дрейфовых неустойчивостей. Возможно также одновременное действие обоих факторов. Исходя из изложенного выше было бы интересно проверить на Q-машине влияние магнитно-звуковой волны на наиболее изученную в Q-машине дрейфово-диссипативную неустойчивость.

Рассмотрим плоский слой столкновительной плазмы, вдоль оси Z которого направлено постоянное магнитное поле; предположим, что плазма неоднородна вдоль оси x, т. е. $n = n(x)$, $T = T(x)$. Вдоль постоянного магнитного поля приложено осциллирующее магнитное поле

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_z H_1 \sin(k_0 x - \Omega t), \tag{1}$$

где k_0 — волновое число магнитно-звуковой волны, Ω — частота магнитно-звуковой волны, лежащая в диапазоне $\omega_{Hi} < \Omega < (\omega_{He}\omega_{Hi})^{1/2}$, $\Omega \gg \omega$, $k_z V_{Te}$.

Предположим, что выполняется обычное для Q-машин соотношение $\omega_{Hi} < \omega_{pi}$. Пусть длина свободного пробега электронов λ_e значительно меньше продольной длины волны $\lambda_\parallel$, а длина свободного пробега ионов λ_i больше размера неоднородности $l = \varkappa^{-1} = \left(\frac{1}{n_0}\frac{dn_0}{dx}\right)^{-1}$, т. е. столкновениями ионов можно пренебречь и рассматривать только столкновения электронов. Для нахождения малой поправки к функции распределения электронов воспользуемся дрейфово-кинетическим уравнением в форме Батнагара ([6]). Предположим также, что $kr_D < 1$. Тогда дисперсионное соотношение, описывающее взаимодействие магнитно-звуковой волны с дрейфово-диссипативной неустойчивостью, полученное методом, изложенным в работе ([8]), будет иметь вид

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{[1 + \delta\varepsilon_e(\omega)]\,\delta\varepsilon_i(\omega)} + \frac{a^2}{2}\varphi(\Omega) = 0, \tag{2}$$

где

$$a = \frac{H_1}{H_0} \frac{\Omega}{\omega_{Hi}} \frac{k_y}{k_0}, \tag{3}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \delta\varepsilon_e(\omega) + \delta\varepsilon_i(\omega), \tag{4}$$

$$\varphi(\Omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega+\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon(\omega-\Omega)}\right]. \tag{5}$$

При выводе соотношения (4) использовано предположение о малости величины a по сравнению с единицей. Парциальные вклады в диэлектрическую проницаемость от электронов и ионов с учетом «конечности» ларморовского радиуса и при выполнении неравенств $\nu_e \gg \omega$, $\nu_e > k_z V_{Te}$ (в дрейфовых колебаниях k_z весьма мало) и $k_z V_{Te} > \omega > k_z V_{Ti}$ имеют вид

$$\delta\varepsilon_e(\omega) = \frac{1}{k^2 r_D^2} \frac{k_z^2\, T/(m_e\nu_e) + i\omega^*}{-i\omega + k_z^2 T/(m_e\nu_e)}, \tag{6}$$

$$\delta\varepsilon_i(\omega) = \frac{1}{k^2 r_D^2}\left[A(\rho_i)\frac{\omega-\omega^*}{\omega} - 1\right]; \tag{7}$$

здесь введены следующие обозначения: $A(\rho_i) = I_0(k_\perp^2\rho_i^2)\exp(-k_\perp^2\rho_i^2)$, ρ_i — ларморовский радиус ионов, $k_\perp$ — волновое число дрейфовых волн в направлении, перпендикулярном H_0, $\omega^* = \frac{cT}{eH_0} k_y\, d\ln n_0/dx$ — дрейфовая частота.

Подставляя $\delta\varepsilon_e$ и $\delta\varepsilon_i$ в дисперсионное соотношение (2), получим

$$\left[A(\rho_i)\frac{\omega-\omega^*}{\omega} - 1\right] + \frac{i\omega^* + k_z^2 T/(m_e\nu_e)}{i\omega - k_z^2 T/(m_e\nu_e)} - \beta\left[A(\rho_i)\frac{\omega-\omega^*}{\omega} - 1\right] \times$$
$$\times \left[\frac{i\omega^* + k_z^2 T/(m_e\nu_e)}{i\omega - k_z^2 T/m_e\nu_e)}\right] = 0; \tag{8}$$

здесь $\beta = \frac{1}{k^2 r_D^2} a^2 \varphi(\Omega)$.

Если H_1 равно нулю, получим обычное дисперсионное соотношение, описывающее дрейфово-диссипативную неустойчивость ([6]). В другом предельном случае, когда H_1 (а следовательно, и β) достаточно велики, можно пренебречь первыми двумя членами дисперсионного соотношения (8). При этом система устойчива, так как соответствующие частоты ω действительны.

Перепишем дисперсионное соотношение (8) в следующем виде:

$$\omega^2 + \omega\left[i\omega_s \frac{\rho_i^2/2\,(1+\beta+1/(1+A'))}{1+\beta\rho_i^2/2} - \frac{\beta}{1+\beta}\omega_e\left(1+\frac{\beta\rho_i^2}{2}\right)\right] +$$
$$+ i\omega_e\omega_s \frac{\rho_i^2/2}{1-A'} - \frac{\beta}{(1+\beta)^2}\omega_e^2\left(1+\frac{\beta\rho_i^2}{2}\right)^2 = 0, \tag{9}$$

где

$$\omega_s = \frac{k_z^2}{k^2}\frac{\omega_{He}\,\omega_{Hi}}{\nu_e}\left(1+\frac{\beta\rho_i^2}{2}\right), \quad \omega_e = \omega^* \frac{1+\beta}{1+\beta\rho_i^2/2}, \quad A' = I_0(z_i)\exp(-z_i),$$
$$z_i = \beta\rho_i^2/2.$$

Условием устойчивости системы относительно колебаний является $\mathrm{Im}(\omega) < 0$. Используя это условие, можно получить значение амплитуды в.ч. поля магнитно-звуковой волны, необходимой для стабилизации дрейфово-диссипативной неустойчивости.

Рассмотрим случай, когда $\rho_i \to 0$; тогда $A' \simeq 1 - z_i$. Кроме того, будем полагать, что β достаточно велика, так что выполняется неравенство

$$1 \ll \beta\rho_i^2 \ll \rho_i^{-2}. \tag{10}$$

Указанное ограничение на β не противоречит предположению о малости параметра $a = \dfrac{H_1}{H_0}\dfrac{\Omega}{\omega_{Hi}}\dfrac{k_y}{k_0}$, введенному при выводе дисперсионного соотношения (4), так как вытекающее из (10) условие

$$a^2\varphi(\Omega) \gg \omega_{Hi}^2/\omega_{pi}^2 \tag{11}$$

может выполняться и при $a < 1$, поскольку $\omega_{Hi} / \omega_{pi}$ является малым параметром.

Выражая Im (ω) из соотношения (9), в рамках сделанных предположений получаем

$$\operatorname{Im}(\omega_\pm) = i\omega_s\left\{-\frac{1}{2} \pm \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{\beta\rho_i^2}\,\frac{\omega_e^2}{\omega_s^2 + \omega_e^2(\beta\rho_i^2/2)^2}\right]\right\}. \tag{12}$$

При $\beta\rho_i^2 \gg 1$ и $\varphi(\Omega) > 0$ [4] для обоих корней Im $(\omega_\pm) < 0$, что соответствует устойчивости.

Таким образом, дрейфово-диссипативная неустойчивость может быть стабилизирована в.ч. полем магнитно-звуковой волны. Критерий стабилизации является несколько более жестким, чем в случае бесстолкновительной плазмы [3], однако предлагаемый метод стабилизации может оказаться более эффективным по сравнению с методом стабилизации дрейфово-диссипативной неустойчивости высокочастотным электрическим полем [4].

Найдем частоту и амплитуду стабилизирующего поля магнитно-звуковой волны для обычных параметров Q-машины [7]: магнитное поле порядка 1 Кгс, длина установки $L = 100$ см, плотность плазмы 10^{11} см$^{-3}$, температура 0,1 эв, частота кулоновских столкновений 10^7 сек$^{-1}$. Максимальная частота магнитного звука $(\omega_{He}\omega_{Hi})^{1/2}$, что при указанных параметрах системы составляет $6\cdot10^7$ сек$^{-1}$. Для того чтобы магнитно-звуковая волна поместилась в установке, должно выполняться соотношение $c / \omega_{pe} < r$, где $r = 2$ см — радиус плазменного столба. Учитывая, что $\Omega > \nu$, для вычисления $\varphi(\Omega)$ можно пользоваться формулой

$$\varphi(\Omega) = \frac{\Omega^2\left\{\left(1 + \dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2}\dfrac{k_\perp^2}{k^2}\right)\Omega^2 - \omega_{pe}^2\dfrac{k_Z^2}{k^2} - \omega_{pi}^2\right\}}{\left\{\left(1 + \dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega_{He}^2}\dfrac{k_\perp^2}{k^2}\right)\Omega^2 - \omega_{pe}^2\dfrac{k_Z^2}{k^2} - \omega_{pi}^2\right\}^2 - \Omega^2\dfrac{\omega_{pe}^4}{\omega_{He}^4}\dfrac{k_y^2\varkappa^2}{k^4}}. \tag{13}$$

При $k_z \simeq 2\pi / L$, $k \sim k_y \sim m / r \leqslant 1 / \rho_i$, $m = 4$ [7] $\varphi(\Omega) = 0{,}005$. Подставляя полученное значение в соотношение (11), получаем

$$H_1 / H_0 \sim 10^{-3}.$$

Это соотношение получено для четвертой моды неустойчивых колебаний, более низкие моды могут быть стабилизированы еще более слабыми полями магнитно-звуковой волны.

Автор благодарит А. А. Иванова за постановку задачи.

Поступило
20 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Иванов, Л. И. Рудаков, И. Тейхманн, ЖЭТФ, 54, 1381 (1968). [2] А. А. Иванов, Ю. Б. Казаков и др., Письма ЖЭТФ, 9, 356 (1969); M. W. Alcock, B. E. Kees, Symposium on Feedback and Dynamic Control of Plasmas, Princeton, 1970, Rep. A1. [3] А. А. Иванов, Т. К. Соболева, ЖЭТФ, 62, 2170 (1972). [4] Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, ЖЭТФ, 52, 293 (1967). [5] А. А. Иванов, В. Ф. Муравьев, ЖЭТФ, 54, 254 (1970). [6] Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, В кн. Вопросы теории плазмы, 4, 288, 1968. [7] H. W. Handel, P. A. Politzev, Conference on Physics of Quiescent Plasmas, Frascati, Jan, 1967, Rep. B-7. [8] А. А. Иванов, Взаимодействие высокочастотных полей с плазмой, В кн. Вопросы теории плазмы, 6, 1972, стр. 156. [9] В. Л. Вдовин, О. А. Зиновьев и др., Письма ЖЭТФ, 14, 228 (1971).