Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

Ф. Г. АВХАДИЕВ, Л. А. АКСЕНТЬЕВ

ПРИНЦИП ПОДЧИНЕННОСТИ В ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ОДНОЛИСТНОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 XI 1972)

В статье излагается применение подчиненных функций (например, ([1]), гл. VIII, § 8) к условиям принадлежности определенному классу однолистных функций и к обратным краевым задачам ([2, 3]).

1. Справедливо утверждение, примыкающее к теореме Рогозинского (([1]), стр. 357).

Теорема 1. *Если $\Phi_0(z)$, $\Phi(z)$, $\Phi_0(0) = \Phi(0)$, являются регулярными функциями в круге $|z| < 1$ и*

$$\Phi(z) \prec \Phi_0(z) \tag{1}$$

(т. е. функция $\Phi(z)$ подчинена функции $\Phi_0(z)$), то

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}\Phi(\rho e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}\Phi_0(\rho e^{i\theta})|\, d\theta \quad \text{при} \quad 0 < \rho < 1. \tag{2}$$

Доказательство. Напомним (([1]), стр. 357), что (1) равносильно тождеству $\Phi(z) = \Phi_0[\varphi(z)]$, причем $\varphi(z)$ — регулярная функция, $|\varphi(z)| < 1$ в $|z| < 1$ и $\varphi(0) = 0$. Возьмем неравенство

$$|\operatorname{Re}\Phi(re^{i\theta})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}\Phi_0(\rho e^{i\gamma})| \operatorname{Re}\frac{\rho e^{i\gamma} + \varphi(re^{i\theta})}{\rho e^{i\gamma} - \varphi(re^{i\theta})}\, d\gamma, \tag{3}$$

которое получается из обычной формулы Пуассона. Итоговое соотношение (2) возникает из (3) интегрированием и переходом к пределу при $r \to \rho$.

Из определения граничного вращения в смысле Паатеро ([4]) с использованием теоремы 1, в которой нужно принять

$$\Phi(z) = 1 + zf''(z)/f'(z), \quad \Phi_0(z) = 1 + zf_0''(z)/f_0'(z), \tag{4}$$

следует

Теорема 2. *Если функции $f_0(z)$, $f(z)$ регулярны в $|z| < 1$, их производные $f_0'(z)$, $f'(z)$ отличны от нуля, граничное вращение*

$$a[f_0] \equiv \lim_{|z|\to 1}\int_0^{2\pi}\left|1 + \operatorname{Re} z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}\right| d\theta = 4\pi, \quad z = re^{i\theta},$$

и $zf''(z)/f'(z) \prec zf_0''(z)/f_0'(z)$, то с функцией $f(z)$ связано граничное вращение $a[f] \leqslant 4\pi$, и поэтому $f(z)$ будет однолистной.

Отметим, что найдутся функции $f_1(z)$, для которых

$$zf_1''(z)/f_1'(z) \prec \lambda zf_0''(z)/f_0'(z), \quad \lambda > 1, \quad \text{и} \quad a[f_1] > a[f_0] = 4\pi,$$

поэтому функции $f_1(z)$ выйдут из класса Паатеро. В этом смысле теорема 2 является неулучшаемой.

При некоторых дополнительных предположениях выход из класса Паатеро означает одновременно выход из класса почти выпуклых функций ([5]) или даже из класса однолистных функций. Именно, теорема 2 дает неулучшаемое условие почти выпуклости, если дополнительно считать, что функция $\Phi_0(z)$ вида (4) отображает круг $|z| < 1$ на однолистную область и $\lim\limits_{z\to e^{i\theta}} \operatorname{Re} \Phi_0(z)$ меняет знак только в двух точках. Если же относительно функции $f_0(z)$ предположить, что она является неоднолистной в замкнутом круге, то теорема 2 дает неулучшаемое условие по отношению к всему классу однолистных функций.

Как частные случаи теоремы 2 укажем несколько наиболее интересных условий, достаточных для однолистности (почти выпуклости) функции $f(z)$ в $|z| < 1, f'(z) \neq 0$.

1°) $-\alpha \leqslant \operatorname{Re} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \leqslant \frac{\alpha}{2\alpha - 3}, \quad \alpha \geqslant \frac{3}{2}$ ([6]).

2°) $\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - i\beta \right| \leqslant R_\beta$, где β — действительное число, а R_β является наименьшим корнем уравнения

$$\frac{R^2 - \beta^2}{4\beta} \ln \frac{R^2 + \beta^2 + 2\beta\sqrt{R^2 - 1}}{R^2 + \beta^2 - 2\beta\sqrt{R^2 - 1}} + \arcsin \frac{R^2 + \beta^2}{R\sqrt{4\beta^2 + (R^2 - \beta^2)^2}} = \pi.$$

В пределе при $\beta \to 0$ будем иметь

3°) $\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leqslant R_0$, причем $2{,}9 < R_0 < 3$ является корнем уравнения

$$\sqrt{R^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{R} = \pi. \tag{5}$$

Ранее аналогичный результат в виде $|f''(z) / f'(z)| < \sqrt{6}$ получил Умедзава ([6]).

4°) $\left| \operatorname{Im} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leqslant \left(\frac{2}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} \right)^{-1} \approx 2{,}42$, значение θ_0 удовлетворяет уравнению

$$0 + \left(\ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{-1} \int\limits_0^\theta \ln \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \, d\gamma = -\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) и их корни найдены в связи с решением некоторых частных задач Л. А. Аксентьевым ([7]) и В. Н. Гайдуком ([8]).

Отметим один факт отрицательного характера: не существует достаточного условия почти выпуклости в форме

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\alpha} z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right] \geqslant -A, \quad A > 0, \quad 0 < |\alpha| < \pi. \tag{7}$$

2. Основой для дальнейшего служит

Теорема 3. *Пусть функции* $\Phi_0(z)$, $\Phi(z)$ *регулярны в круге* $|z| < 1$, *имеют там разложения*

$$\Phi_0(z^n) = c_n z^n + c_{2n} z^{2n} + \ldots, \quad \Phi(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$

и пусть выполняется неравенство

$$\left| \frac{d\Phi_0(z^n)}{dz} \right| \leqslant \frac{|z|^{n-1} \mathbf{c}(|z|^n)}{1 - |z|^n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1 \tag{8}$$

или

$$|\Phi_0'(z)| \leqslant \frac{\mathbf{c}(|z|)}{1 - |z|^2} \quad \text{при} \quad n = 1, \tag{8^0}$$

где $\mathbf{c}(|z|^n)$ — *неубывающая функция.*

Если $\Phi(z) \prec \Phi_0(z)$, *то неравенство* (8) *или* (8^0) *выполняется и для функции* $\Phi'(z)$.

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 4 из ([1]), стр. 359, с привлечением неравенства Г. М. Голузина (([1]), стр. 323) и неравенства Шварца.

Применим теорему 3 к достаточному условию однолистности функций $f(z)$, регулярных в $|z| < 1$,

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leqslant \frac{1}{1-|z|^2} \tag{9}$$

([9]) * и к достаточному условию однолистности функций $F(\zeta)$, регулярных в $|\zeta| > 1$, за исключением полюса в ∞,

$$\left| \zeta \frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} \right| \leqslant \frac{C(|\zeta|)}{|\zeta|^2 - 1} \tag{10}$$

(см. ([10])). В условии (10) функция $C(|\zeta|)$ должна удовлетворять неравенству

$$\max_{R \geqslant 1} \frac{C(R)}{R} + \frac{1}{2} \max_{R \geqslant 1} C(R) \leqslant 1.$$

Дополнительно будем предполагать, что функция $C(R)$ не возрастает.

Теорема 4. *Если для регулярной функции $f_0(z)$ выполняется в круге $|z| < 1$ условие* (9) *и*

$$\ln f'(z) \prec \ln f_0'(z), \quad \ln f_0'(0) = \ln f'(0) = 0,$$

то регулярная функция $f(z)$ будет однолистной.

Теорема 5. *Если регулярная (с полюсом в ∞) функция $F_0(\zeta) = \int \Phi_0(\zeta^2)\, d\zeta$ удовлетворяет в области $|\zeta| > 1$ условию* (10) *и*

$$\ln F'(\zeta) \prec \ln \Phi_0(\zeta), \quad \ln F_0'(\infty) = \ln F'(\infty) = 0,$$

то регулярная в $|\zeta| > 1$ функция $F(\zeta)$ с простым полюсом в ∞ является однолистной.

С помощью теорем 4 и 5 можно получить множество достаточных признаков однолистности по характерным областям в плоскостях $\ln f'(z)$, $\ln F'(\zeta)$ (или $f'(z)$, $F'(\zeta)$). Каждая из этих областей может быть подобрана так, что ее расширение приведет к появлению функций, не удовлетворяющих условиям (9) или (10). Поэтому в определенном смысле признаки однолистности будут неулучшаемыми.

Кроме признаков, которые получены нами в ([10]), обратим внимание на достаточные признаки однолистности в двух таких следствиях из теоремы 5.

Следствие 1. *Если значения $\omega = \ln F'(\zeta)$ покрываются внутренностью правильного многоугольника, вписанного в окружность $|\omega| = I_n / 2$, причем $I_n = \int\limits_0^1 (1-x^n)^{-2/n} dx$, то $F(\zeta)$ однолистна.*

Следствие 2. *Функция $F(\zeta)$ однолистна при одном из следующих условий:*

1) *если значения $F'(\zeta)$ покрываются прямоугольником*

$$0 < m \leqslant \operatorname{Re} F' \leqslant M, \quad |\operatorname{Im} F'| \leqslant N,$$

при связях $\dfrac{N}{\sqrt{\lambda} K(\lambda)\, m} \leqslant \dfrac{1}{2}$ *и* $\dfrac{N}{K(\lambda)} = \dfrac{M-m}{K(\lambda')}$, *где* $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$ *и*

$$K(\lambda) = \int\limits_0^1 [(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)]^{-1/2} dx;$$

2) *если значения $F'(\zeta)$ покрываются полосой $0 < m \leqslant \operatorname{Re} F' \leqslant M$, $(M-m)/M \leqslant \pi/4$ (предельный случай предыдущего условия с $\lambda = 1$).*

3. С помощью теоремы 1 результаты п. 1 переносятся на n-симметричные функции:

$$f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots, \quad |z| < 1,$$

* Беккер ([9]) получил также оценку $1 < a < 4/e \approx 1{,}47$ для постоянной a в неулучшаемом условии однолистности $|zf''(z)/f'(z)| \leqslant a/(1-|z|^2)$. Точное значение постоянной a не найдено, поэтому мы пользуемся условием (9).

и

$$F(\zeta)=\zeta+\frac{b_{n-1}}{\zeta^{n-1}}+\frac{b_{2n-1}}{\zeta^{2n-1}}+\cdots,\quad |\zeta|>1.$$

Например, *если* $zf''(z)\,/\,f'(z)\prec 2z^n(z^n+n+1)\,/\,(1-z^{2n})\equiv zf_0''(z,n)\,/\,/\,f_0'(z,n)$, *то n-симметричная функция* $f(z)$, *регулярная в* $|z|<1$, *является однолистной* *; *если* $\zeta F''(\zeta)\,/\,F'(\zeta)\prec 2[\zeta^n(n-1)+1]\,/\,(\zeta^{2n}-1)$, *то n-симметричная функция* $F(\zeta)$, *регулярная в* $|\zeta|>1$, *за исключением простого полюса в* ∞, *является однолистной.* При этом используются признаки однолистности через граничное вращение для n-симметричных функций в $|z|<1$, принадлежащие В. Н. Гайдуку ([11]), и в $|\zeta|>1$, принадлежащие В. П. Микке ([12]).

Теорема 2 легко обобщается на случай p-листных функций благодаря результатам Умедзава ([6]), которые дают достаточные условия не более p-листности через граничное вращение.

Вообще принцип подчиненности просто применяется в связи с условиями однолистности интегрального характера, например, в связи с условием Нехари ([13]) для регулярных в круге функций $f(z)$:

$$\int\limits_0^{2\pi}|\{f,z\}|\,d\theta\leqslant 8,\qquad z=re^{i\theta},$$

где $\{f,z\}$ — производная Шварца.

Укажем теперь приложения результатов из пп. 1 и 2 к обратным краевым задачам ([2, 3]).

1) На основании условия 4°) из п. 1 автоматически получается улучшение оценки для разделяющей постоянной ([14, 15]): $K_0\geqslant 2{,}42$ — для внутренней обратной краевой задачи.

2) Как вытекает из работ Ф. Д. Гахова ([16]) и С. Н. Кудряшова ([17]), функция

$$F(\zeta)=\zeta+a_0+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^2}+\cdots,\quad |\zeta|>1,$$

будет единственным решением внешней обратной краевой задачи, если выполняется неравенство

$$\left|\zeta\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right|<\frac{2}{|\zeta|^2-1},\quad 1<|\zeta|<\infty. \tag{11}$$

С помощью теоремы 3 при $n=2$ получается бесчисленное множество областей единственности для решения внешней задачи в плоскости $\ln F'(\zeta)$.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
3 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966. [2] Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужин, Обратные краевые задачи и их приложения, Казань, 1965. [3] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. [4] V. Paatero, Über die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind. Akademische Abhandlung, Helsinki, 1931. [5] W. Kaplan, Michigan Math. J., 1, № 2, 169 (1952). [6] T. Umesawa, Tôhoku Math. J., 7, № 3, 212 (1955). [7] Л. А. Аксентьев, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 3, 3 (1968). [8] В. Н. Гайдук, Тр. семин. по краевым задачам, Казань, в. 9 (1972). [9] J. Becker, Über Subordinationsketten und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen, Dissertation, Berlin, 1970. [10] Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, ДАН, 198, № 4, 743 (1971). [11] В. Н. Гайдук, Тр. семин. по краевым задачам, Казань, в. 8, 55 (1971). [12] Л. А. Аксентьев, Ф. Г. Авхадиев, В. П. Микка, Третья республ. конфер. математиков Белоруссии. Тез. докл., ч. 1, Минск, 1971, стр. 79. [13] Z. Nehari, Univalent Functions and Linear Differential Equations. Lect. Funct. Complex Variable. Ann. Arbor. Univ. Michigan Press, 1955, p. 49. [14] Л. А. Аксентьев, Тр. семин. по обратным краевым задачам, Казань, в. 2, 12 (1964). [15] Ф. Г. Авхадиев, В. Н. Гайдук, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 6, 3 (1968). [16] Ф. Д. Гахов, Уч. зап. Казанск. унив., 113, кн. 10, 9 (1953). [17] С. Н. Кудряшов, Изв. высш учебн. завед., Матем., № 8, 30 (1969).

* Функция $f_0(z,1)$ совпадает с функцией Кёбе $z\,/\,(1-z)^2$.