Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Г. П. АМИРДЖАНОВ

Q-ПРОСТРАНСТВА И КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 X 1972)

В работе под наследственно Q-пространствами понимаются такие пространства, каждое подмножество которых есть Q-пространство. Через $c(X)$ мы будем обозначать число Суслина топологического пространства X. Полагаем $cc(X) = \{c(A): A \subset X\}$. Под $l(X)$ мы будем понимать верхнюю грань длин свободных последовательностей топологического пространства X. В работе всегда пространства регулярны, $s(X)$ есть плотность, а $w(X)$ — вес пространства X.

Б. Э. Шапировский заметил, что из доказательства леммы 2 работы [3] можно получить следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть X — бикомпакт, $x \in U \subset X$, U открыто в X. Тогда или $l(X) > \aleph_0$, или существует бикомпакт $B \subset U$, $x \in U$, для которого $\chi(B, X) \leqslant \aleph_0$ и $w(B) \leqslant \mathfrak{c}$.*

Лемма 2. *Пусть X — бикомпакт, являющийся наследственно Q-пространством, и $s(X) \leqslant \mathfrak{c}$. Тогда $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.*

Доказательство. Возьмем $A \subset X$, для которого $[A] = X$ и $|A| = s(X)$. Подобно тому, как это сделано в [9], построим по трансфинитной индукции множества A_α такие, что:

1°) $A \subset A_1$;

2°) для каждого $S \subset A_\lambda$, $\lambda < \omega_1$, $|S| \leqslant \aleph_0$, существует x_S — предельная точка, $x_S \in A_\alpha$ для каждого $\alpha > \lambda$;

3°) $|A_\alpha| \leqslant \mathfrak{c}$, $A_\alpha \subset A_\beta$ при $\beta > \alpha$.

Действительно, пусть мы построили A_α для $\alpha < \lambda < \omega_1$. Положим $\tilde{A}_\lambda = \bigcup\{A_\alpha: \alpha < \lambda\}$, тогда $|\tilde{A}_\lambda| \leqslant \mathfrak{c}$. Возьмем для каждого $S \subset \tilde{A}_\lambda$, $|S| \leqslant \aleph_0$ предельную точку x_S для S в X и положим $A_\lambda = \tilde{A}_\lambda \cup (\bigcup\{x_S: S \subset \tilde{A}_\lambda, |S| \leqslant \aleph_0\})$. Легко видеть, что построенные таким образом A_α удовлетворяют условиям 1°) — 3°).

Положим $\tilde{A} = \bigcup\{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}$. Тогда $A \subset \tilde{A}$, $\tilde{A}$ — счетно-компактно. Действительно, если $S \subset \tilde{A}$, $|S| \leqslant \aleph_0$. Существует такое $\alpha < \omega_1$, что $S \subset A_\alpha$ и, следовательно, существует x_S — предельная точка для S в X. $x_S \in A_{\alpha+1} \subset \tilde{A}$. Легко видеть, что $|\tilde{A}| \leqslant \mathfrak{c}$. Но, поскольку X есть наследственно Q-пространство, а $\tilde{A}$ есть счетно-компактное пространство, получаем, что $\tilde{A}$ есть бикомпакт. Так как $[\tilde{A}] = X$, получаем неравенство $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.

Лемма 3. *Пусть X — наследственно Q-пространство, являющееся бикомпактом. Тогда $l(X) \leqslant \aleph_0$.*

Доказательство. Действительно, пусть $l(X) > \aleph_0$; тогда существует свободная последовательность $T = \{x_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ в X. Поскольку X — бикомпакт, то существует x_0 — точка полного накопления для T в X. Возможны два случая:

1°) существует такое $\alpha < \omega_1$, что $x_0 \in [\bigcup\{x_\lambda: \lambda \leqslant \alpha\}]$, но тогда $x_0 \in X \setminus [\bigcup\{x_\lambda: \lambda > \alpha\}] = V$ открыто в X; $|V \cap T| \leqslant \aleph_0$. Получили противоречие.

2°) $x_0 \notin [T]_{\aleph_0}$. Но поскольку $x_0 \in [T]$, $[T]_{\aleph_0}$ счетно-компактно, а X — наследственно Q-пространство, то $[T]_{\aleph_0}$ — бикомпакт. Получили противоречие с включением $x_0 \in [T] \setminus [T]_{\aleph_0}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть X — бикомпакт, являющийся наследственно Q-пространством и $c(X) \leqslant \aleph_0$. Тогда $|X| \leqslant \mathfrak{c}$.*

Доказательство. По лемме 3, $l(X) \leqslant \aleph_0$. Но тогда, пользуясь леммой 1, получаем, что для каждой точки $x \in X$ существует бикомпакт F_x, для которого $x \in F_x$, $w(F_x) \leqslant \mathfrak{c}$ и $\chi(F_x, X) \leqslant \aleph_0$. В таком случае $s(F_x) \leqslant \aleph_0$, откуда по лемме 2 получаем неравенство $|F_x| \leqslant \mathfrak{c}$. Возьмем в X такое семейство γ, что $\gamma = \{F: F \subset X, F$ — бикомпакт, $|F| \leqslant \mathfrak{c}$, $\chi(F, X) \leqslant \aleph_0\}$, $[\cup\{F: F \in \gamma\}] = X$ и для любых F, $\Phi \in \gamma$, $F \neq \Phi$ имеет место $F \cap \Phi = \Lambda$. Тогда по лемме 6 из [3] получаем $|\gamma| \leqslant \mathfrak{c}$, откуда выводим неравенство $s(X) \leqslant \mathfrak{c}$. Применив лемму 2, получим $|X| \leqslant \mathfrak{c}$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует теорема П. С. Александрова о мощности совершенно нормального бикомпакта.

Примечание. Способом, аналогичным использованному в доказательстве леммы 2, легко показать, что наследственно Q-пространство, являющееся k-пространством, имеет счетную тесноту.

Приведем простой пример, показывающий, что даже в случае бикомпактов теорема 1 не есть следствие теоремы А. В. Архангельского о мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности.

Пример 1. X — бикомпакт, являющийся наследственно Q-пространством, $s(X) \leqslant \aleph_0$, но $\chi(X) > \aleph_0$.

Возьмем бикомпакт X_0 — «две стрелки». Известно, что X_0 — совершенно нормальный бикомпакт, сепарабельный, но не метризуемый. В таком случае диагональ Δ в $X_0 \times X_0 = \tilde{X}_0$ не есть G_δ-множество, но $\tilde{X}_0$ удовлетворяет первой аксиоме счетности и сепарабельно. Рассмотрим разбиение пространства $\tilde{X}_0$ на классы эквивалентности, для которого класс эквивалентности точки $x \notin \Delta$ есть множество $\{x\}$, а, если $x \in \Delta$, то ее класс эквивалентности есть множество Δ. Обозначим полученное фактор-пространство через X, а проектирование $\tilde{X}_0$ на фактор-пространство — через f, $f(\Delta) = p$. Тогда, очевидно, f есть совершенное отображение, $\chi(p, X) > \aleph_0$. X является сепарабельным пространством.

Покажем, что X есть наследственно Q-пространство. Пусть $A \subset X$. Тогда, если $p \notin A$, то, легко видеть, что A гомеоморфно $f^{-1}(A) = B$. Но B является Q-пространством как подмножество бикомпакта $\tilde{X}_0$ с первой аксиомой счетности и, следовательно, A есть Q-пространство. В случае $p \in A$ имеем, что A является Q-замкнутым множеством в бикомпакте X и по теореме из [6] подмножество A составляет Q-пространство. Таким образом, мы показали, что X есть наследственно Q-пространство.

Vaughan доказал [7], что если X — пространство точечно-счетного типа, то $\beta X \setminus X$ есть Q-пространство. В той же работе он построил пример в предположении С.Н. пространства X, которое не есть пространство точечно-счетного типа, но $\beta X \setminus X$ есть Q-пространство. Мы дадим два примера пространств не точечно-счетного типа, обладающих тем свойством, что $\beta X \setminus X$ есть Q-пространство, но для построения которых не нужно использовать С.Н. В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 4. *Пусть $p: \beta X \to Y$ — факторное отображение на хаусдорфово пространство Y. Если $A \subset \beta X \setminus X$ и для каждой точки $x \in A$ $p^{-1}p(x) = x$, а $B = p(A)$, $Z = Y \setminus B$, то $\beta Z = Y$ и B гомеоморфно A.*

Доказательство. Пусть $f: Z \to [0, 1]$ — непрерывное отображение в отрезок; тогда покажем, что существует продолжение f до непрерывного отображения всего Y в отрезок. Положим $T = \beta X \setminus A$, тогда $p^{-1}(Z) = T$, $\beta T = \beta X$. Поскольку $f \circ p$ непрерывно отображает T в $[0, 1]$, поэтому существует $g: \beta X \to [0, 1]$, для которого $g|_T = f \circ p|_T$.

Определим отображение h следующим образом: $h(x) = f(x)$ для $x \in Z$ и $h(x) = g(p^{-1}(x))$ для $x \in B$. Легко видеть, что $h|_Z = f$. Докажем непрерывность h. Для этого достаточно доказать непрерывность отображения $h \circ p$. Но $h \circ p = g$ — непрерывное отображение βX в $[0, 1]$. Заметим теперь, что $A = p^{-1}(B)$ и p — совершенное отображение βX на Y, откуда получаем: $p|_A$ есть совершенное уплотнение A на B, т. е. гомеоморфизм.

Лемма доказана.

Пример 2. X — счетное T_2-пространство, $\beta X \setminus X$ является Q-пространством, но X не есть пространство точечно-счетного типа.

Возьмем в $\beta N \setminus N$ семейство γ дизъюнктных открыто-замкнутых подмножеств $\beta N \setminus N$, для которого $|\gamma| = \mathfrak{c}$ и $[\cup \{U: U \in \gamma\}] = \beta N \setminus N$. Положим $F = (\beta N \setminus N) \setminus \cup \{U: U \in \gamma\}$. Легко видеть, что F — бикомпакт. Склеим теперь F в точку и полученное таким образом из βN фактор-пространство обозначим через Y, а отображение проектирования βN на Y — через p. Положим $A = (\beta N \setminus N) \setminus F$. Тогда легко видеть, что Y есть T_2-пространство и выполнены все условия леммы 4. Следовательно, если $X = p(N) \cup \cup p(F)$, то $\beta X = Y$. Пусть $p(F) = b$. Покажем, что X не есть пространство точечно-счетного типа. Действительно, если Φ — бикомпакт, для которого $b \in \Phi \subset X$, $\chi(\Phi, X) \leqslant \aleph_0$, то, поскольку, p — совершенное отображение $N \cup F$ на X, получаем, что $H = p^{-1}(\Phi)$ есть бикомпакт, содержащий F и удовлетворяющий условию $\chi(H, N \cup F) \leqslant \aleph_0$, и в таком случае выполняется также неравенство $\chi(H, \beta N) \leqslant \aleph_0$. Тогда $F = H \cap (\beta N \setminus N)$ является G_δ-множеством в $\beta N \setminus N$ и, следовательно, по теореме из ([11]), $\operatorname{Int} F \neq \Lambda$, т. е. $F \cap A \neq \Lambda$. Получили противоречие.

Таким образом X не есть пространство точечно-счетного типа.

Теорема 2. *Пусть X — вполне регулярное пространство. Для того чтобы X было финально-компактно, необходимо и достаточно, чтобы для каждого бикомпакта $F \subset \beta X \setminus X$ существовал бикомпакт Φ, для которого выполняются следующие условия*:

$$\chi(\Phi, \beta X) \leqslant \aleph_0, \quad F \subset \Phi \subset \beta X \setminus X.$$

Доказательство. Пусть пространство X финально-компактно, $F \subset \subset \beta X \setminus X$. Для каждого $x \in X$ рассмотрим открытое в βX множество V_x, для которого $[V_x] \cap F = \Lambda$. Из финальной компактности пространства X следует существование $\{x_i: x_i \in X, i \in N\}$ такого, что $X \subset \cup \{V_{x_i}: i \in N\}$. Если $O_{x_i} = \beta X \setminus [V_{x_i}]$, то $F \subset \cap \{O_{x^i}: i \in N\} \subset \beta X \setminus X$ и, следовательно, существует $\Phi \subset \beta X \setminus X$, для которого $F \subset \Phi$ и $\chi(\Phi, \beta X) \leqslant \aleph_0$.

Докажем теперь достаточность. Аналогично тому, как это сделано в ([10]), можно показать, что если для каждого бикомпакта $F \subset \beta X \setminus X$ существует счетное локально-конечное открытое покрытие γ пространства X, для элементов которого $[U]_{\beta X} \cap F = \Lambda$, то пространство X финально-компактно. Пусть теперь F — бикомпакт, лежащий в $\beta X \setminus X$. Существует бикомпакт Φ, для которого $F \subset \Phi \subset \beta X \setminus X$ и $\chi(\Phi, \beta X) \leqslant \aleph_0$. В таком случае существует такое непрерывное отображение f βX в отрезок $[0, 1]$, для которого $\Phi = f^{-1}(O)$. Положим $O_1 = (1/2, 1]$, $O_i = (1/2i, 3/2i)$ для $i \geqslant 2$ и возьмем $U_i = f^{-1}(O_i) \cap X$ — открытое в X множество. Заметим теперь, что $X \subset \subset f^{-1}((0, 1])$ и $\{O_i: i \in N\}$ есть локально-конечное покрытие полуинтервала $(0, 1]$. В таком случае $\{U_i: i \in N\}$ есть локально-конечное счетное покрытие пространства X. Поскольку, $0 \notin [O_i]$ для $i \in N$, то $F \cap f^{-1}([O_i]) = \Lambda$ и, следовательно, $F \cap [U_i]_{\beta X} = \Lambda$. Теорема доказана.

Пример 3. X — связное сепарабельное финально-компактное пространство, для которого $\beta X \setminus X$ есть Q-пространство, но X не есть пространство точечно-счетного типа.

Пусть $T = [0, 1)$, тогда T является связным локально-бикомпактным финально-компактным пространством. По теореме из ([5]) имеет место неравенство $c(\beta T \setminus T) \geqslant \mathfrak{c}$. Пусть γ — семейство попарно непересекающихся открытых множеств $\beta T \setminus T$ и $|\gamma| = \mathfrak{c}$. Так как T финально-компактно и, следовательно, является Q-пространством, существуют такие бикомпакты F_U для $U \in \gamma$, которые удовлетворяют условиям $F_U \subset U$, $\chi(F_U, \beta T)$. Положим $A = \cup \{F_U: U \in \gamma\}$, $R = \beta T \setminus A$.

Поскольку A есть дискретная сумма $\mathfrak{c}$ бикомпактов, A не финально-компактно, но является Q-пространством. По теореме из работы ([8]), R не есть пространство счетного типа. Пусть $B \subset R$, B — бикомпакт, который не содержится ни в каком бикомпакте счетного характера, лежащем в R. Приклеим в βT бикомпакт B в точку b и обозначим полученное фактор-пространство через Y. Пусть p есть проектирование βT на фактор-пространство Y. Если $X = Y \setminus p(A)$, то, по лемме 4, $\beta X = Y$, $p(A)$ гомеоморфно A. Поскольку $A = \beta X \setminus X$, то, по построению A, для каждого бикомпакта $F \subset \beta X \setminus X$ существует бикомпакт Φ, удовлетворяющий условиям: $\chi(\Phi, \beta X) \leqslant \aleph_0$, $F \subset \Phi \subset \beta X \setminus X$, то, по теореме 2, пространство X финально-компактно. Легко заметить, что X сепарабельно. Поскольку $\beta T \setminus A$ связно, то X связно. Докажем, что X не является пространством точечно-счетного типа. Пусть H — бикомпакт, удовлетворяющий условиям: $\chi(H,X) \leqslant \aleph_0$, $b \in H \subset X$. Тогда, поскольку p является совершенным отображением $\beta T \setminus A$ на X, множество $p^{-1}(H)$ есть бикомпакт счетного характера, лежащий в $\beta T \setminus A$ и $B \subset p^{-1}(H)$. Получили противоречие с выбором B. Теорема доказана.

Верен, однако, следующий простой критерий.

Теорема 3. *Пусть X — вполне регулярное пространство; тогда, для того чтобы X было пространством точечно-счетного типа, необходимо и достаточно выполнения следующего условия для каждого бикомпактного расширения bX: если $x \in X$, то существует Y — финально-компактное пространство, для которого $bX \setminus X \subset Y$, $x \notin Y$.*

В заключение я хочу выразить искренною благодарность В. И. Пономареву за руководство работой.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, «Наука», 1971. [2] А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, ДАН, 182, № 5 (1968). [3] А. В. Архангельский, ДАН, 192, № 2 (1970). [4] А. В. Архангельский, ДАН, 187, № 5 (1969). [5] W. W. Comfort, G. Hugg, Trans. Am. Math. Soc., 111, № 3 (1964). [6] S. Mrówka, Bull. Acad. Polon. sci., Cl. 3, 5, № 10, 80 (1957). [7] Vanghan, Trans. Am. Math. Soc., 151, № 1 (1970). [8] M. Henriksen, J. R. Isbell, Duke Math. J., 25, № 1 (1958). [9] R. Engelking, Outline of General Topology, North — Holand, Amsterdam, 1968. [10] H. Tamano, Pacific J. Math., 10 (1960). [11] W. Rudin, Duke Math. J., 23, № 2 (1956).