Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 3

УДК 517.948.34 МАТЕМАТИКА

Г. И. ЭСКИН

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 2 XII 1972)

1. Изучение некоторых смешанных задач теории упругости сводится к решению эллиптических псевдодифференциальных уравнений (п.д.у.) с малым параметром (см. ([1, 2])). В настоящей работе находится асимптотика решений для широкого класса таких уравнений. Отметим, что построение асимптотики в эллиптическом случае имеет много общего с построением параметрикса для эллиптических краевых задач (см. ([3])). Мы будем в дальнейшем пользоваться некоторыми обозначениями и определениями работы ([3]).

Ранее п.д.у., зависящие от параметра, изучались в работах А. С. Демидова ([4]) и Л. Д. Покровского ([5]) для некоторого подкласса эллиптических п.д.у. с символами, удовлетворяющими условию гладкости в области (см. ([6])).

2. Определим класс символов со следующими свойствами:

а) Пусть $A_0(x, \xi)$ — эллиптический символ класса $\hat{O}_{m_1}$ (см. ([3])) такой, что при любом N и $r \geqslant 1$

$$A_0(x, \xi) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x, \omega) r^{m_1-k} + a_{N+1}(x, \omega, r), \tag{1}$$

где $\omega = \xi / |\xi|$, $r = |\xi|$, причем $a_k(x, \omega) \in C^\infty$, $a_0(x, \omega) \neq 0$ при $x \in \mathbf{R}^n$, $|\omega| = 1$, $a_{N+1} \in \hat{O}_{m_1-N-1}$ при $r \geqslant 1$.

б) Пусть $A_1(x, \omega, t) \in C^\infty$ при $x \in \mathbf{R}^n$, $|\omega| = 1$, $t \geqslant 0$, причем для любого N и $t \geqslant 1$

$$A_1(x, \omega, t) = \sum_{k=0}^{N} b_k(x, \omega) t^{m_2-k} + B_{N+1}(x, \omega, t), \tag{2}$$

где $b_k(x, \omega) \in C^\infty$, $b_0(x, \omega) \neq 0$ при $x \in \mathbf{R}^n$, $|\omega| = 1$, $B_{N+1}(x, \omega, t) \in \hat{O}_{m_2-N-1}$ при $t \geqslant 1$.

Кроме того, предполагается, что $A_1(x, \omega, t) \neq 0$ при $t \geqslant 0$ и $A_1(x, \omega, 0) \equiv 1$.

Обозначим через $A_\varepsilon(x, \xi)$ следующий символ:

$$A_\varepsilon(x, \xi) = (A_0(x, \xi) + \varepsilon A_2(x, \omega, r, \varepsilon r, \varepsilon)) A_1(x, \omega, \varepsilon r), \tag{3}$$

где $A_0(x, \xi)$ и $A_1(x, \omega, \varepsilon r)$ те же, что в (1) и (2), а $A_2(x, \omega, r, t, \varepsilon) \in C^\infty$ при $x \in \mathbf{R}^n$, $|\omega| = 1$, $r \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ и $A_2 \in \hat{O}_{m_1}$ при $r \geqslant 1$ и $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ равномерно по ε.

3. Рассмотрим в области G с гладкой границей Γ п.д.у.

$$pA_\varepsilon(x, D) u_\varepsilon = f, \tag{4}$$

где $A_\varepsilon(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор (п.д.о.) с символом (3), p — оператор сужения функции на область G. Пусть $H_s(G)$ — пространство

Соболева — Слободецкого в G, а $\mathring{H}_s(G)$ — пространство функций, принадлежащих $H_s(\mathbf{R}^n)$ с носителем в $\bar{G}$. Обозначим через $H_{s,r}(\mathbf{R}^n)$ пространство обобщенных функций в $\mathbf{R}^n$ со следующей конечной нормой:

$$\|u\|^2_{s,r} = \int (1 + |\xi|)^{2s} (1 + \varepsilon|\xi|)^{2r} |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Пространства $\mathring{H}_{s,r}(G)$ и $H_{s,r}(G)$ определяются аналогично $\mathring{H}_s(G)$ и $H_s(G)$. Пусть $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — индексы факторизации эллиптических символов $A_0(x, \xi)$ и $A_1(x, \omega, |\xi|)$ в области G (см. [6]). Для простоты предполагается, что $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ не зависят от $x' \in \Gamma$.

Теорема 1. *Пусть* $|s - \operatorname{Re} \varkappa_1| < 1/2$ *и для любой* $f \in H_{s-m_1}(G)$ *существует единственное решение* $u_0 \in \mathring{H}_s(G)$ *уравнения*

$$pA_0(x, D) u_0(x) = f(x). \tag{5}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, *где* ε_0 *достаточно мало, для любой* $f \in H_{s-m_1, \operatorname{Re}\varkappa_2 - m_2}(G)$ *существует единственное решение* u_ε *уравнения* (4), *принадлежащее пространству* $\mathring{H}_{s, \operatorname{Re}\varkappa_2}(G)$.

Приводимая ниже схема доказательства теоремы 1 дает также способ построения приближенного решения уравнения (4).

Пусть Γ_ρ — окрестность Γ в G, расстояние от каждой точки которой до Γ меньше ρ. Предполагается, что ρ достаточно мало. Пусть $A_1(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n)$ — символ п.д.о. A_1, записанного в Γ_ρ в локальной системе координат (см. [3, 6]). Произведем факторизацию $A_1(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n)$ по ξ_n при $0 \leqslant x_n \leqslant \rho$:

$$A_1(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n) = A_-^{(1)}(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n) A_+^{(1)}(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n). \tag{6}$$

Обозначим через $A_+(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n)$ гладкий по x эллиптический символ, совпадающий с $A_+^{(1)}(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n)$ при $0 \leqslant x_n \leqslant \rho$ и равный $(1 + \varepsilon^2|\xi'|^2 + \varepsilon^2\xi_n^2)^{\varkappa_2/2}$ при $2\rho \leqslant x_n \leqslant 3\rho$. Аналогично через A_- обозначается эллиптический символ, соединяющий гладким по x образом $A_-^{(1)}(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n)$ при $0 \leqslant x_n \leqslant \rho$ с $(1 + \varepsilon^2|\xi'|^2 + \varepsilon^2\xi_n^2)^{(m_2 - \varkappa_2)/2}$ при $2\rho \leqslant x_n \leqslant 3\rho$.

Вернемся в $\Gamma_{3\rho} \setminus \Gamma_{2\rho}$ от локальной системы координат (л.с.к.) к исходной системе координат в G и обозначим через $\Lambda_\pm(x, \varepsilon\xi)$ символы п.д.о., отвечающих п.д.о. $A_\pm(x', x_n, \varepsilon D', \varepsilon D_n)$ в л.с.к. Далее продолжим гладким образом $\Lambda_\pm(x, \varepsilon\xi)$ с $\Gamma_{3\rho} \setminus \Gamma_{2\rho}$ внутрь области G с сохранением эллиптичности.

Обозначим через $A_+^{(-1)}$ следующий оператор:

$$A_+^{(-1)} v = \sum_j \psi_j A_j^+ \varphi_j v, \tag{7}$$

где $\{\varphi_j, U_j\}$ — разбиение единицы в $\bar{G}$, $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_j$, $\psi_j \in C_0^\infty(U_j)$, $\varphi_j\psi_j \equiv \varphi_j$. Если $U_j \cap \Gamma = \phi$, то A_j^+ является п.д.о., в j-й л.с.к. с символом $A_+^{-1}(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n)$. Если же $U_j \cap \Gamma = \phi$, то предполагается, что $U_j \cap \Gamma_{2\rho} = \phi$, и через A_j^+ обозначается п.д.о. в исходной системе координат с символом $\Lambda_+^{-1}(x, \varepsilon\xi)$. Аналогично определяется оператор $A_-^{(-1)}$ по символам $A_-(x', x_n, \varepsilon\xi', \varepsilon\xi_n)$ и $\Lambda_-(x, \varepsilon\xi)$.

Будем искать решение уравнения (4) в виде $u_\varepsilon = A_+^{(-1)} v_\varepsilon$. Применим к (4) слева оператор $A_+^{(-1)}$. Получим

$$p(A_0(x, D) + A_{1\varepsilon}(x, D)) v_\varepsilon = pA_-^{(-1)} lf, \tag{8}$$

где $lf \in H_{s-m_1, \operatorname{Re}\varkappa_2 - m_2}(\mathbf{R}^n)$ — произвольное продолжение f с G на $\mathbf{R}^n$, а для п.д.о. $A_{1\varepsilon}(x, D)$ доказывается оценка

$$\|A_{1\varepsilon} v\|_{s-m_1} \leqslant C_5 \varepsilon^{1-\delta} \|v\|_s, \tag{9}$$

$\|v\|_s$ — норма в $H_s(\mathbf{R}^n)$, $\delta > 0$ любое.

Отметим, что операторы $A_+^{(-1)}$ и $A_-^{(-1)}$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ однозначно отображают $\overset{\circ}{H}_{s,\,\mathrm{Re}\,\varkappa_2}(G)$ и $H_{s-m_1,\,\mathrm{Re}\,\varkappa_2-m_2}(G)$ на $\overset{\circ}{H}_s(G)$ и $H_{s-m_1}(G)$ соответственно, так что уравнение (8) эквивалентно уравнению (4).

В силу (9) и однозначной разрешимости уравнения (5), решение уравнения (8) существует и может быть найдено методом последовательных приближений:

$$v_\varepsilon=v_{\varepsilon 1}+v_{\varepsilon 2}+\cdots+v_{\varepsilon N}+\cdots, \tag{10}$$

где $pA_0v_{\varepsilon1}=pA_-^{(-1)}lf,\ pA_0v_{\varepsilon2}=-pA_{1\varepsilon}v_{\varepsilon1},\ldots,\ pA_0v_{\varepsilon N}=-pA_{1\varepsilon}v_{\varepsilon,\,N-1},\ldots$

Если через $v_\varepsilon^{(N)}$ обозначить сумму первых N членов в (10), то имеют место следующие оценки:

$$\|v_\varepsilon-v_\varepsilon^{(N)}\|_s\leqslant C_\delta\varepsilon^{N+1-\delta}\|pA_-^{(-1)}lf\|_{s-m_1}\leqslant C_{1\delta}\varepsilon^{N+1-\delta}\|f\|^+_{s-m_1,\,\mathrm{Re}\,\varkappa_2-m_2}, \tag{11}$$
$$\|u_\varepsilon-u_\varepsilon^{(N)}\|_{s,\,\mathrm{Re}\,\varkappa_2}\leqslant C_{2\delta}\varepsilon^{N+1-\delta}\|f\|^+_{s-m_1,\,\mathrm{Re}\,\varkappa_2-m_2}\quad\forall\delta>0,$$

где $u_\varepsilon^{(N)}=A_+^{(-1)}v_\varepsilon^{(N)}$.

Отметим, что асимптотическое разложение (10) не требует, кроме принадлежности пространству $H_{s-m_1,\,\mathrm{Re}\,\varkappa_2-m_2}(G)$, никакой дополнительной гладкости $f(x)$.

4. Предположим теперь, что $f(x)\in H_M(G)$, $M\gg1$ (в частности, $f(x)\in C^\infty(\bar G)$). Тогда можно получить более простое выражение для разложения по ε решения уравнения (4), в частности, получить более простое выражение для главного члена асимптотики. А именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $f(x)\in C^\infty(\bar G)$ и выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда в Γ_ρ для любого N в соответствующей л.с.к. справедливо следующее разложение:*

$$u_\varepsilon=A_+^{(-1)}(x',x_n,0,\varepsilon D_n)\,u_0(x',x_n)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=0}^{k-1}\varepsilon^k\ln^p\varepsilon A_+^{(-)}(x',x_n,0,\varepsilon D_n)u_{kp}(x',x_n)+$$
$$+\sum_{k=2}^{N+1}\sum_{p=0}^{k-1}\varepsilon^k\ln^p\varepsilon F^{-1}_{\xi_n}[A^+_{kp}(x',x_n,0,\varepsilon\xi_n)(\xi_n+i)^{-\varkappa_1}]\,v_{kp}(x')+w^{(\varepsilon)}_{N+1}, \tag{12}$$

где $A_+^{(-1)}(x',x_n,0,\varepsilon D_n)$ — п.д.о. в $\mathbf{R}^1$ с символом $(A_+^{(1)}(x',x_n,0,\varepsilon\xi_n))^{-1}$ (см. формулу (6)), $A_{kp}{}^+(x',x_n,0,\eta_n)=O(|\eta_n|^{-\mathrm{Re}\,\varkappa_2-1+\delta})$ при $|\eta_n|\to\infty$, $v_{kp}(x')\in C^\infty(\Gamma)$, $u_{kp}(x',x_n)\in C^\infty(G)\cap\overset{\circ}{H}_s(G)$, $F_{\xi_n}{}^{-1}$ — оператор обратного преобразования Фурье по ξ_n, $\|w^{(\varepsilon)}_{N+1}\|_{s,\,\mathrm{Re}\varkappa_2}\leqslant C_\delta\varepsilon^{N+1-\delta}\|f\|_{N_1}{}^+$, $N_1=N_1(N)$ достаточно велико, $\delta>0$ любое.

Главный член асимптотики имеет вид

$$u_\varepsilon=A_+^{(-1)}(x',x_n,0,\varepsilon D_n)\,u_0(x',x_n)+w_1^{(\varepsilon)}, \tag{13}$$

$u_0(x)\in\overset{\circ}{H}_s(G)$ — *решение уравнения* (5), $\|w_1^{(\varepsilon)}\|_{s,\,\mathrm{Re}\,\varkappa_2}=O(\varepsilon^{1-\delta})$.

При $\mathrm{Re}\,\varkappa_1>-1$ выражение (13) может быть записано в более простом виде

$$u_\varepsilon=e^{i\frac{\pi}{2}(\varkappa_1+1)}\,\Gamma(\varkappa_1+1)F^{-1}_{\xi_n}A_+^{(-1)}(x',x_n,0,\varepsilon\xi_n)(\xi_n+i0)^{-\varkappa_1-1}\cdot w_0(x',x_n)+w^{(\varepsilon)}, \tag{14}$$

где $w_0=x_n^{-\varkappa_1}u_0(x',x_n)$, $\|w^{(\varepsilon)}\|_{s,\,\mathrm{Re}\,\varkappa_2}=O(\varepsilon^{1-\delta})$.

Отметим, что в $G\setminus\Gamma_\rho$ u_ε имеет разложение вида

$$u_\varepsilon=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\ldots+\varepsilon^Nu_N(x)+\varepsilon^{N+1}u^{(\varepsilon)}_{N+1}(x), \tag{15}$$

где $u_0(x)$ та же функция, что и в (12). В Γ_ρ при $x_n\geqslant\rho_0>0$ выражение вида (15) может быть получено из (14) путем разложения $A_+^{(-1)}(x',x_n,0,\varepsilon\xi_n)$, $A_{kp}{}^+(x',x_n,0,\varepsilon\xi_n)$ по ε.

Доказательство теоремы 2 более сложно, чем доказательство теоремы 1, хотя принципиальная схема одна и та же. Оно содержит, в частности, процедуру определения членов разложения (12). Отметим, что методика Вишика — Люстерника ([7]) неприменима в рассматриваемом случае. Примером п.д.у. с малым параметром, удовлетворяющего условиям теорем 1 и 2, служит контактная задача для упругого слоя толщины ε, покоящегося на жестком основании (см. ([1, 2])). В этом случае

$$A_1(x, \omega, \varepsilon|\xi|) = \frac{4\,\mathrm{sh}^2\,\varepsilon|\xi|}{\varepsilon|\xi|(2\varepsilon|\xi| + \mathrm{sh}\,2\varepsilon|\xi|)},\quad A_0 \equiv 1,\ A_2 \equiv 0,\ \varkappa_1 = 0,\ \varkappa_2 = -\frac{1}{2}.$$

Наш способ получения асимптотики отличается от предложенного в ([2]) и приводит к другим представлениям для приближенного решения.

Замечание 1. Если символ $A_1(x, \omega, \varepsilon|\xi|)$ и все его производные в л.с.к. при $\omega' = 0$ бесконечно дифференцируемы по $\eta_n = \varepsilon\xi_n$ в нуле (ср. с определением класса $D_\alpha^{(0)}$ в ([6])) и аналогичным условиям удовлетворяет A_2, то в разложении (12) отсутствуют $\ln^p \varepsilon$.

Замечание 2. Выше была рассмотрена первая краевая задача для уравнения (4). Аналогичными методами можно получить асимптотику решения общей краевой задачи для п.д.о. с граничными условиями и потенциалами.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
28 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Александров, И. И. Ворович, ПММ, 24, № 2 (1960). [2] В. А. Бабешко, ДАН, 204, № 3 (1972). [3] Г. И. Эскин, Тр. Московск. матем. общ., 28 (1973). [4] А. С. Демидов, УМН, 27, в. 1 (1972). [5] Л. Д. Покровский, ДАН, 188, № 3 (1969). [6] М. И. Вишик, Г. И. Эскин, УМН, 20, в. 3 (1965). [7] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, в. 5 (1957).