

Академик АН МССР В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ, В. И. АРНАУТОВ, М. И. УРСУ

ВЕДДЕРБАРНОВСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НАСЛЕДСТВЕННО ЛИНЕЙНО-КОМПАКТНЫХ КОЛЕЦ

Теорема Веддербарна об отщеплении радикала * конечномерной ассоциативной алгебры в ряде работ переносилась на различные классы колец и алгебр. В связи с изучением топологических колец различными авторами делались попытки перенести эту теорему и на топологические кольца. В этом направлении наиболее полно изучены бикомпактные ассоциативные кольца, а именно, для них получен критерий отщепляемости радикала (см. (4)). В отдельных работах теорема Веддербарна доказывалась и для линейно-компактных ассоциативных колец и алгебр (см., например, (2, 5)). Однако в силу широты класса линейно-компактных колец пока не удается получить критерий отщепляемости радикала.

В настоящей работе рассматривается класс наследственно линейно-компактных колец, который является промежуточным между бикомпактными вполне несвязными кольцами и линейно-компактными кольцами. Доказывается ряд свойств этих колец, и для них получен критерий отщепляемости радикала (теорема 3).

Напомним, что топологическое кольцо ** R называется линейно-компактным, если оно обладает базисом окрестностей нуля из левых идеалов и любой фильтр классов вычетов по замкнутым левым идеалам имеет непустое пересечение (см., например, (6)).

Топологическое кольцо R называется наследственно линейно-компактным кольцом, если всякое его замкнутое подкольцо является линейно-компактным кольцом.

Замечание 1. Очевидно, что всякое бикомпактное вполне несвязное кольцо является наследственно линейно-компактным кольцом.

Замечание 2. Всякое замкнутое подкольцо и любой непрерывный гомоморфный образ в кольцо с базисом окрестностей нуля из левых идеалов наследственно линейно-компактного кольца являются наследственно линейно-компактными кольцами.

Лемма 1. *Наследственно линейно-компактное кольцо без ненулевых идемпотентов радикально.*

Так как радикал Джекобсона произвольного кольца не содержит идемпотентов, то из леммы 1 получаем

Следствие 1. *Всякое замкнутое подкольцо радикального наследственно линейно-компактного кольца радикально.*

Теорема 1. *Всякий элемент радикального наследственно линейно-компактного кольца R топологически нильпотентен.*

Лемма 2. *Любой элемент дискретного наследственно линейно-компактного кольца R имеет конечный аддитивный порядок.*

Лемма 3. *Радикальное дискретное наследственно линейно-компактное кольцо R простой характеристики p конечно.*

Лемма 4. *Радикальное дискретное наследственно линейно-компактное кольцо R , аддитивная группа которого не содержит групп типа p^∞ , конечно.*

* Под радикалом в этой работе понимается радикал Джекобсона.

** Здесь и ниже под кольцом будем понимать ассоциативное кольцо.

Замечание 3. Легко проверить, что если аддитивная группа кольца R является прямой суммой групп типа p^∞ , то $R^2 = 0$.

Лемма 5. *Радикальное дискретное наследственно линейно-компактное кольцо нильпотентно.*

Следствие 2. *Радикальное наследственно линейно-компактное кольцо с базисом идеальных окрестностей нуля является топологически нильпотентным кольцом.*

Лемма 6. *Наследственно линейно-компактное тело R является некоторым алгебраическим расширением конечного поля.*

Лемма 7. *Некоммутативное полупростое наследственно линейно-компактное кольцо R без двусторонних замкнутых идеалов является матричным кольцом над конечным полем.*

Теорема 2. *Полупростое наследственно линейно-компактное кольцо R является прямой суммой $J_1 \oplus J_2$, где J_1 — полная прямая сумма с тихоновской топологией алгебраических расширений конечных полей, а J_2 — полная прямая сумма с тихоновской топологией матричных колец над конечными полями.*

Напомним, что дискретное кольцо R с радикалом $N(R)$ называется *SBJ-кольцом*, если:

1) уравнение $x^2 - x = z$, где $z \in N(R)$, имеет такое решение $z_1 \in N(R)$, что

2) подкольцо элементов из R , коммутирующих с z , совпадает с подкольцом элементов, коммутирующих с z_1 .

Аналогично ⁽¹⁾, предложение 3, стр. 84, доказывается

Лемма 8. *Наследственно линейно-компактное кольцо является SBJ-кольцом.*

Лемма 9. *Примарное наследственно линейно-компактное кольцо R алгебраически изоморфно матричному кольцу над некоторым вполне примарным наследственно линейно-компактным кольцом.*

Лемма 10. *Любое семейство $S = \{e_\alpha | \alpha \in \Omega\}$ ортогональных идемпотентов наследственно линейно-компактного кольца суммируемо.*

Лемма 11. *Пусть R — наследственно линейно-компактное кольцо.*

Тогда любое множество ортогональных идемпотентов из $R \setminus N(R)$ можно поднять до множества ортогональных идемпотентов в R .

Лемма 12. *Пусть R — наследственно линейно-компактное кольцо.*

Тогда существуют такие замкнутые подкольца A и B , что:

1) $R = A + B$,

2) $A \cap B = \{0\}$,

3) $B \subseteq N(R)$,

4) A является полной прямой суммой с тихоновской топологией примарных наследственно линейно-компактных колец.

Говорим, что топологическое кольцо R допускает веддербарновское разложение в категории топологических колец, если его радикал $N(R)$ замкнут и существует такое замкнутое подкольцо S , что:

1) $R = S + N(R)$,

2) $S \cap N(R) = \{0\}$,

3) каноническое отображение подкольца S кольца R на $R \setminus N(R)$ является топологическим изоморфизмом.

Лемма 13. *Если топологическое кольцо R допускает веддербарновское разложение в категории топологических колец и S — соответствующее замкнутое подкольцо, то аддитивная группа кольца R топологически изоморфна прямой сумме аддитивных групп подколец S и $N(R)$.*

Лемма 14. *Примарное коммутативное наследственно линейно-компактное кольцо R с единицей простой характеристики p допускает веддербарновское разложение в категории топологических колец.*

Лемма 15. *Если R — такое наследственно линейно-компактное кольцо простой характеристики, что $R \setminus N(R)$ — конечное поле, то R допускает веддербарновское разложение в категории топологических колец.*

Лемма 16. Пусть R_1 — замкнутое подкольцо такого наследственно линейно-компактного кольца R простой характеристики, для которого $R|N(R)$ — конечное поле.

Тогда для любого веддербарновского разложения $S_1 + N(R_1)$ кольца R_1 в категории топологических колец существует такое веддербарновское разложение $S + N(R)$ кольца R в категории топологических колец, что $S_1 \subseteq S$.

Лемма 17. Всякое вполне примарное наследственно линейно-компактное кольцо R простой характеристики p допускает веддербарновское разложение в категории топологических колец.

Теорема 3. Наследственно линейно-компактное кольцо R допускает веддербарновское разложение в категории топологических колец тогда и только тогда, когда любой элемент из $R|N(R)$ конечного аддитивного порядка имеет прообраз в кольце R того же аддитивного порядка.

Необходимость. Пусть $S + N(R)$ — некоторое веддербарновское разложение кольца R и $\bar{x}$ — произвольный элемент из $R|N(R)$ конечного аддитивного порядка. Если теперь x — некоторый прообраз в S элемента $\bar{x}$, то порядки элементов x и $\bar{x}$ совпадают.

Достаточность. Пусть наследственно линейно-компактное кольцо R удовлетворяет условиям теоремы. По лемме 12 существуют такие замкнутые подкольца A и B , что $R = A + B$, $B \subseteq N(R)$ и A является полной прямой суммой с тихоновской топологией примарных наследственно линейно-компактных колец A_α . Покажем вначале, что каждое из колец A_α имеет простую характеристику. В самом деле, если e_α — единица кольца A_α , то $A_\alpha = e_\alpha A e_\alpha = e_\alpha R e_\alpha$. Тогда $N(A_\alpha) = N(R) \cap A_\alpha$ и, значит, $A_\alpha + N(R) | N(R) \cong A_\alpha | N(A_\alpha)$.

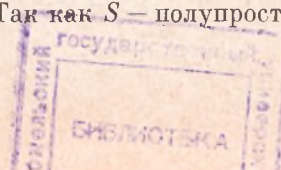
Так как $A_\alpha | N(A_\alpha)$ — матричное кольцо над телом, то оно дискретно и его единица имеет простой аддитивный порядок. Если теперь $\bar{e}_\alpha$ — образ элемента e_α в $A_\alpha + N(R) | N(R)$, то $\bar{e}_\alpha$ является единицей в $A_\alpha + N(R) | N(R)$ и, значит, имеет простой аддитивный порядок p_α . По условию теоремы, существует такой элемент $a \in N(R)$, что $p_\alpha(e_\alpha + a) = 0$ и, значит, $p_\alpha(e_\alpha + e_\alpha a e_\alpha) = p_\alpha e_\alpha (e_\alpha + a) e_\alpha = 0$. Так как e_α — единица в A_α и $e_\alpha a e_\alpha \in e_\alpha N(R) e_\alpha = N(A_\alpha)$, то элемент $e_\alpha + e_\alpha a e_\alpha$ обратим в A_α , т. е. $(e_\alpha + e_\alpha a e_\alpha)^{-1} \in A_\alpha$. Тогда $p_\alpha e_\alpha = p_\alpha (e_\alpha + e_\alpha a e_\alpha) \cdot (e_\alpha + e_\alpha a e_\alpha)^{-1} = 0$ и, значит, $p_\alpha A_\alpha = 0$, т. е. A_α имеет простую характеристику.

По лемме 9 A_α изоморфно матричному кольцу над некоторым вполне примарным наследственно линейно-компактным кольцом B_α , т. е. $A_\alpha = (B_\alpha)_{n_\alpha}$. Согласно лемме 17, каждое B_α допускает веддербарновское разложение $S_\alpha + N(B_\alpha)$, где S_α — поля. Тогда $A_\alpha = (S_\alpha)_{n_\alpha} + (N(B_\alpha))_{n_\alpha}$. Так как $N(A_\alpha) = (N(B_\alpha))_{n_\alpha}$ (см. (1), стр. 25) и в $(S_\alpha)_{n_\alpha}$ возможна только дискретная линейно-компактная топология, то $(S_\alpha)_{n_\alpha} + (N(B_\alpha))_{n_\alpha}$ является веддербарновским разложением кольца A_α в категории топологических колец.

Если S — кольцо, равное полной прямой сумме с тихоновской топологией дискретных колец $(S_\alpha)_{n_\alpha}$, то S является линейно-компактным кольцом и подкольцом топологического кольца R . Следовательно, S — замкнутое подкольцо кольца R . Так как $N(A_\alpha) \subseteq N(R)$ для любого α и $N(R)$ — замкнутый идеал в R , то полная прямая сумма подколец $N(A_\alpha)$ содержится в $N(R)$. Тогда $A \subseteq S + N(R)$, и, значит, $R = A + B \subseteq S + N(R) + B = S + N(R)$. Так как S — полупростое замкнутое подкольцо кольца R , то, согласно следствию 1, $N(R) \cap S = \{0\}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать топологический изоморфизм колец S и $R|N(R)$.

В самом деле, канонический изоморфизм ϕ кольца S на $R|N(R)$ является непрерывным. Так как S — полупростое линейно-компактное кольцо, то



оно линейно-компактное в узком смысле (см. ⁽³⁾, стр. 294), и, значит, φ — открытое отображение, т. е. φ является топологическим изоморфизмом. Этим теорема полностью доказана.

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР
Кышинев

Поступило
6 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Джекобсон, Строение колец, ИЛ, 1961. ² H. Kurke, Math. Nachr., **39**, 33 (1969). ³ H. Leptin, Math. Zs., **66**, 4, 289 (1957). ⁴ K. Numacura, Proc. Japan. Acad., **35**, 7, 313 (1959). ⁵ Ti Yen, Proc. Am. Math. Soc., **8**, 4, 698 (1957). ⁶ D. Zelinsky, Am. J. Math., **75**, 79 (1953).