Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 517.946.6 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. БАГИРОВ, В. И. ФЕЙГИН

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 XI 1972)

За последние годы появилось много работ, в которых изучаются эллиптические уравнения с переменными коэффициентами в неограниченной области. Эллиптическим операторам в R^n посвящены работы ([3], [4], [6]), краевым задачам во внешности ограниченной области — работы ([6], [8]). Общие краевые задачи в области с конической структурой на бесконечности изучены в работе ([2]). Некоторые результаты для случая некомпактной границы получены в ([5]). Во всех этих работах основой является построение регуляризатора.

В этих построениях используются два пути. Первый (это относится к работам ([3], [4])) использует технику псевдодифференциальных операторов в R^n, а второй развивает технику, связанную со «склейкой» регуляризатора из локальных регуляризаторов с помощью специального разбиения единицы. Очевидно, что в случае произвольной неограниченной границы применим только второй путь. Этим способом и получены результаты, сформулированные в настоящей заметке. Заметим, что в работах ([7], [9]) аналогичными методами исследуются эллиптические задачи в областях с негладкой границей.

1. Пусть G — область в R^n с $(n-1)$-мерной бесконечно дифференцируемой границей Γ. Рассмотрим задачу

$$A(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = F(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{G}, \tag{1}$$

$$B_j(x, D)u(x) = \sum_{|\beta|\leqslant m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta u(x) = G_j(x), \quad x \in \Gamma, \quad j = 1, \ldots, m; \tag{2}$$

здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — целочисленные мультииндексы, а

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D_{x_k}^{\alpha_k} = (-i)^{\alpha_k} \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}}, \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Сформулируем условия, при выполнении которых будет изучаться задача (1), (2).

А. Существует гладкая неотрицательная функция $q(x)$ такая, что $|D^\alpha q(x)| \leqslant M_\alpha q(x)^{1+|\alpha|}$ и

$$a_\alpha(x) = a_\alpha^0(x) + a_\alpha^1(x), \quad b_{j\beta}(x) = b_{j\beta}^0(x) + b_{j\beta}^1(x),$$

$$|D^\beta a_\alpha^0(x)| \leqslant K_\beta q(x)^{2m-|\alpha|+|\beta|}, \quad |D^\alpha b_{j\beta}^0(x)| \leqslant K_\alpha q(x)^{m_j-|\beta|+|\alpha|},$$

$$|D^\beta a_\alpha^1(x)| \leqslant \omega_\beta(x) q(x)^{2m-|\alpha|+|\beta|}, \quad |D^\alpha b_{j\beta}^1(x)| \leqslant \omega_\alpha(x) q(x)^{m_j-|\beta|+|\alpha|},$$

где K_β и K_α — постоянные, а функции $\omega_\alpha(x)$ и $\omega_\beta(x)$ стремятся к нулю при $|x| \to \infty$.

Б. Существует покрытие $\{U_k\}$, $k = 1, \ldots, \infty$, области G и отвечающее ему разбиение единицы $\varphi_k(x)$, $k = 1, \ldots, \infty$, такие, что:

1°) число областей $\{U_k\}$, пересекающихся с U_l, конечно и не зависит от l,

2^0) в каждой области U_k, пересекающейся с Γ, граница задается уравнением $y_n = f_k(y')$, где $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ лежат в касательной плоскости к Γ в некоторой точке $x_k \in \Gamma \cap U_k$, а y_n направлена по внутренней нормали к Γ.

В. Покрытие U_k следующим образом связано с функцией $q(x)$ и коэффициентами операторов A, B_j: числовые последовательности

$$\max_{x,y\in U_k} |q(x)-q(y)|\cdot q(y)^{-1}, \qquad \max_{x,y\in U_k} |a_\alpha^0(x)-a_\alpha^0(y)|\cdot q(y)^{|\alpha|-2m},$$

$$\max_{x,y\in U_k} |b_{j\beta}^0(x)-b_{j\beta}^0(y)|\cdot q(y)^{|\beta|-m_j}, \qquad \max_{x\in U_k} |D^\alpha \varphi_k(x)|\cdot q(x)^{-|\alpha|},$$

$$\max_{y\in U_k} |D^\alpha f_k(y')\cdot q(y', y_n)^{1-|\alpha|}| \quad \text{при} \quad |\alpha|>0,$$

стремятся к нулю при $k\to\infty$.

Г. Рассмотрим оператор $\bar{A}(x, D) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2m} \bar{a}_\alpha(x) D^\alpha$, где $\bar{a}_\alpha(x) = a_\alpha^0(x)q(x)^{|\alpha|-2m}$. Мы требуем выполнения при $|x|>N$, $x\in\bar{G}$, оценки

$$\delta_1(|\xi|^2+\mu^2)^m \leqslant \Big|\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} \bar{a}_\alpha(x)\xi^\alpha\mu^{2m-|\alpha|}\Big| \leqslant \delta_2(|\xi|^2+\mu^2)^m$$

для любых $\xi\in R^n$, $\mu\in R^1$. Величины $\delta_1>0$ и δ_2 постоянные.

Д. Пусть $\bar{b}_{j\beta}(x) = b_{j\beta}^0(x)q(x)^{|\beta|-m_j}$, и пусть $\bar{x}_k\in U_k\cap\Gamma$ и $|\bar{x}_k|>N$. Рассмотрим операторы

$$\bar{A}(\bar{x}_k, D, \mu) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} \bar{a}_\alpha(\bar{x}_k) D^\alpha \mu^{2m-|\alpha|},$$

$$\bar{B}_j(\bar{x}_k, D, \mu) = \sum_{|\beta|\leqslant m_j} \bar{b}_{j\beta}(\bar{x}_k) D^\beta \mu^{m_j-|\beta|}, \quad j=1, \ldots, m.$$

Сделаем замену переменной $x=(x', x_n)\to y=(y', y_n)$, где $y=(y', y_n)$ — координаты, связанные с точкой $\bar{x}_k$. Рассмотрим полученную в результате задачу в R_+^n:

$$\bar{A}(\bar{x}_k, D_{y'}, D_{y_n}, \mu)u(y', y_n) = \bar{F}(y', y_n), \quad y_n\geqslant 0,$$

$$\bar{B}_j(\bar{x}_k, D_{y'}, D_{y_n}, \mu)u(y', y_n) = \bar{G}_j(y'), \quad y_n=0, \quad j=1, \ldots, m.$$

Мы требуем, чтобы получившаяся задача была эллиптической задачей с параметром $\mu\in R^1$ в смысле работы ([1]), причем соответствующие постоянные эллиптичности не зависят от k.

Е. Задача (1), (2) эллиптическая.

2. Задача (1), (2) изучается в следующих функциональных пространствах. Пространство $W_{q,f}^{s,p}(G)$ состоит из функций, для которых конечна норма

$$\|u(x)\|^2_{W_{q,f}^{s,p}(G)} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \int_G |D^\alpha u(x)|^2 q(x)^{2(s-|\alpha|)} f(x)^{p+2s} dx,$$

где $s\geqslant 0$ — целое, а p — действительное числа, $f(x)$ — некоторая положительная гладкая функция, связанная с функцией $q(x)$ следующим образом: $D^\alpha f\cdot(f(x)q(x)^{|\alpha|})^{-1}\to 0$ при $|x|\to\infty$.

В пространстве $W_{q,f}^{s-1/2,p}(\Gamma)$ функций, заданных на границе, норма определяется как $\inf\limits_v \|v(x)\|_{W_{q,f}^{s,p}(G)}$, где $v|_\Gamma = u$.

3. Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* А — Е. *Тогда*

а) *оператор* (A, B_j), *действующий из* $W^{s,p}$ (G) *в*

$$W_{q,f}^{s-2m,p}(G)\otimes\prod_{j=1}^m W_{q,f}^{s-m_j-1/2,p}(\Gamma) \equiv H_{q,f}^{s,p}(G, \Gamma)$$

нётеров для всех $s\geqslant s_0 = \max(2m, m_j+1)$ *и вещественных* p;

б) *если* $(Au,\ B_ju) \in \bigcap\limits_{s,p} H^{s,p}_{q,f}(G,\ \Gamma)$ *и* $u(x) \in W^{s_0,p_0}_{q,f}(G)$, *то* $u(x) \in \bigcap\limits_{s,p} W^{s,p}_{q,f}(G)$.

4. В случае произвольной гладкой границы затруднительно построение системы областей $\{U_k\}$.

Мы приведем некоторые условия на области, при которых это построение возможно.

1) Область G задается неравенством $h^\nu(x_n) \geqslant g_0(x') + g_1(x', x_n)$, где $g_0(x')$ — однородная функция порядка ν, $g_0 \neq 0$ при $x' \neq 0$. Функция $g_1(x', x_n)$ удовлетворяет условиям:

а) если $h(x_n) \to \infty$ при $x_n \to \infty$, то $|D^\alpha g_1| \leqslant c_\alpha |x'|^{\nu-1-|\alpha|}$ при $|x'| \to \infty$,

б) если $h(x_n) \to 0$ при $x_n \to \infty$, то $|D^\alpha g_1| \leqslant c_\alpha |x'|^{\nu+1-|\alpha|}$ при $|x'| \to \infty$,

в) если $0 < c_1 < h(x_n) < c_2 < \infty$, то $D^\alpha g_1 \to 0$ при $|x'| \to \infty$.

От функции $h(x_n)$, кроме гладкости, требуется выполнение условий

$$\int\limits_N^\infty h^{-1}(y)\,dy = \infty, \quad D^\alpha h(x_n) \cdot q(x)^{-1-\alpha} \to 0 \text{ при } |x| \to \infty,\ x \in G.$$

При таких предположениях делается замена переменных

$$t = \int\limits_N^{x_n} h^{-1}(y)\,dy, \quad z_i = x_i h^{-1}(x_n), \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{3}$$

затем полученная область преобразуется в цилиндр. При этом оператор (A, B_j), удовлетворяющий условиям А, В — Е, переходит в оператор, также удовлетворяющий этим условиям (если в коэффициентах $(\bar{A}, \bar{B}_j)$ заменить q на qh). Покрытие $\{U_k\}$ в цилиндре можно строить как прямое произведение покрытия основания и зависящего от qh и коэффициентов покрытия оси t.

2) Область G задается неравенством $x_n \geqslant h(x')$, где $h(x')$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям

$$D^\alpha h(x') q(x)^{1-|\alpha|} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty, \quad |\alpha| > 0.$$

Эти условия обеспечивают выполнение условий А — Е для задачи (1), (2) после замены переменных

$$y_n = x_n - h(x'), \quad y_i = x_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

которая переводит область в полупространство R_+^n. Покрытие $\{U_k\}$ в R_+^n строится точно так же, как это было сделано одним из авторов в работе [6] в случае R^n.

Замечание 1. Мы не останавливаемся здесь на разборе более сложных случаев. Можно, например, разбивать область на несколько частей, каждую из которых заменой переменных переводить в цилиндр, в полупространство или в конус (для которого покрытие строится так же, как в работе [6] для R^n). Затем, сделав обратную замену, получить покрытие области, обладающее нужными свойствами.

5. Укажем еще один набор условий, при котором для задачи (1), (2) получается результат типа теоремы 1.

Пусть область определяется условиями п. 4, 1) и 2) и пусть замена $x_n = \chi(t)$, $x_i = z_i h(\chi(t))$ обратная к замене (3).

Введем обозначения:

$$p_\alpha(z, t) = a_\alpha(z, t) h(\chi(t))^{2m-|\alpha|},$$

$$q_{j\beta}(z, t) = b_{j\beta}(z, t) h(\chi(t))^{m_j-|\beta|}.$$

A′. Существуют пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} D_z{}^\beta p_\alpha(z,t) = D_z{}^\beta p_\alpha{}^+(z)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} D_z^\alpha q_{j\beta}(z,t) = D_z^\alpha q_{j\beta}^+(z)$, $j=1,\ldots,m$, $z\in G_1$, и производные по t от коэффициентов ограничены.

Б′. Рассмотрим предельную задачу:

$$P^+(z, D_z, \lambda)v(z) = \sum_{|\alpha'|+\alpha_n\leqslant 2m} P^+_{\alpha'\alpha_n}(z)\lambda^{\alpha_n}D_{z'}^{\alpha'}v(z) = X(z), \quad z\in\bar{G}_1, \tag{4}$$

$$Q_j^+(z, D_z, \lambda)v(z) = \sum_{|\beta'|+\beta_n\leqslant m_j} q^+_{j\beta'\beta_n}(z)\lambda^{\beta_n}D_{z'}^{\beta'}v(z) = Y_j(z), \quad j=1,\ldots,m, \quad z\in G_1'. \tag{5}$$

Здесь мы формально заменили D_t на λ. Мы потребуем, чтобы все $\lambda\in R^1$ были регулярными точками задачи (4), (5).

В′. Задача (1), (2) эллиптическая в $\bar{G}$.

Г′. При $|\alpha|\geqslant 1$ $D^\alpha h(x_n)\cdot h^{\alpha-1}(x_n)\to 0$ при $x_n\to\infty$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* А′ — Г′, *то справедливы все утверждения теоремы* 1 *с заменой пространств* $W^{s,p}_{qj}(G)$ *на пространства* $W^{s,p}_h(G)$ *с нормой*

$$\|u(x)\|^2_{W_h^{s,p}(G)} = \sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_G |D^\alpha u(x)|^2 h(x_n)^{p+2|\alpha|}\,dx_n\,dx'.$$

Замечание 2. Соответствующая теорема может быть доказана в том случае, когда прямая $\operatorname{Im}\lambda = \mathrm{const}\neq 0$ состоит только из регулярных точек задачи (4), (5).

6. Проиллюстрируем полученные выше результаты на простейшем примере. Рассмотрим задачу:

$$\Delta u + \beta(1+|x|^2)^N u = F(x), \quad u|_\Gamma = 0, \tag{6}$$

в области G, которая вне некоторого шара задается неравенством $|x_n|^P\geqslant|x'|^Q$.

1°) Пусть $P<Q\neq 0$, тогда условия теоремы 1 выполнены при $N>-P/Q$ и $\beta\notin\bar{R}_+{}^1$, а условия теоремы 2 — при $N=-P/Q$, $\beta\notin\{t\colon t\geqslant\lambda_0\}$, где λ_0 — первое собственное значение задачи (4), (5), и для $N<-P/Q$, $\beta\in C^1$.

2°) В случаях $0\leqslant Q\leqslant P$ условия теоремы 1 выполнены при $N>-1$ и $\beta\notin\bar{R}_+{}^1$.

3°) Пусть $Q<P\leqslant 0$ или $P>0>Q$; тогда при $n>2$ условия теоремы 1 выполнены для $N>-P/Q$ и $\beta\notin\bar{R}_+{}^1$, а при $n=2$ — для $N>-1$, $\beta\in\bar{R}_+{}^1$.

Можно показать, что в случаях 1°) — 3°) задача (6) однозначно разрешима.

Замечание 3. В случае $Q=P$ (т. е. для конуса) при $N\leqslant -1$ результат типа теоремы 2 неверен. Для этой задачи нормальная разрешимость имеет место в пространствах $W^{s,p}_h(G)$ при всех (s,p), не лежащих на счетном множестве прямых.

Замечание 4. Аналогичными методами могут быть исследованы вопросы самосопряженности и дискретности спектра оператора, порожденного задачей (1), (2).

Поступило
26 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Агранович, М. И. Вишик, УМН, 19, в. 3 (1964). [2] В. С. Рабинович, Матем. сборн., 80 (122) (1969). [3] В. В. Грушин, Функциональн. анализ, 4, в. 3 (1970). [4] М. А. Шубин, ДАН, 196, № 2 (1971). [5] Л. А. Багиров, Кандидатская диссертация, МГУ, 1970. [6] Л. А. Багиров, Матем. сборн., 86 (128) (1971). [7] В. И. Фейгин, ДАН, 197, № 5 (1971). [8] Л. А. Багиров, ДАН, 191, № 3 (1970). [9] В. И. Фейгин, УМН, 27, № 2 (1972).