Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 512.83 *МАТЕМАТИКА*

Л. М. БРЭГМАН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ И ИХ ПЕРМАНЕНТОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 16 III 1973)

В данной заметке устанавливаются некоторые неравенства для перманентов неотрицательных матриц. В частности, доказывается неравенство Минка ([1]) о перманентах квадратной матрицы, состоящей из нулей и единиц (такие матрицы в дальнейшем будем называть (0, 1)-матрицами).

Основным аппаратом для доказательства приводимых здесь утверждений является теория двойственности выпуклого программирования. Мы будем применять следующие обозначения. Множество целых чисел от 1 до n будем обозначать через $1:n$. Если $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор и $N \subset 1:n$, то через $x[N]$ обозначим вектор, составленный из тех компонент вектора x, индексы которых принадлежат множеству N.

Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:
минимизировать

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}(x_j\ln x_j+c_jx_j) \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\quad i\in 1:m, \tag{2}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j\in 1:n; \tag{3}$$

здесь и в дальнейшем считаем: $0\ln 0=0$.

Предположим, что существует вектор, удовлетворяющий (2) и (3). Пусть $N_0\subset 1:n$ — такое множество индексов, что для всякого вектора x, удовлетворяющего (2) и (3), имеет место $x[N_0]=0$. Будем предполагать, что множество $N_1=1:n\setminus N_0$ непусто.

Рассмотрим задачу, двойственную к (1) — (3):
максимизировать

$$\varphi(x,u)=\sum_{j\in N_1}x_j\ln x_j+\sum_{i=1}^{m}u_i\Big(\sum_{j\in N_1}a_{ij}x_j-b_i\Big) \tag{4}$$

при условиях

$$\ln x_j+1+c_j+\sum_{i=1}^{m}u_ia_{ij}=0,\quad j\in N_1. \tag{5}$$

Лемма 1. 1) *Если x^* — решение задачи* (1) — (3), *то* $x^*[N_1]>0$ *и найдется такой вектор* $u=(u_1,u_2,\ldots,u_m)$, *что пара* (x^*,u) *удовлетворяет* (5).

2) *Если найдутся такие векторы $\bar{x}$ и $\bar{u}$, что $\bar{x}$ удовлетворяет* (2), (3), *а пара* $(\bar{x},\bar{u})$ *удовлетворяет* (5), *то $\bar{x}$ — решение задачи* (1) — (3), *а* $(\bar{x},\bar{u})$ *— решение задачи* (4), (5). *При этом* $f(\bar{x})=\varphi(\bar{x},\bar{u})$.

Положительность вектора $x^*[N_1]$ доказана в ([2]). Остальные утверждения леммы следуют из теоремы двойственности.

Из леммы следует неравенство

$$\varphi(\bar{x}, \bar{u}) \geqslant \varphi(x, u), \tag{6}$$

верное для всех пар (x, u), удовлетворяющих (5).

Будем рассматривать в дальнейшем неотрицательные квадратные матрицы порядка n.

Матрицу A будем называть частично разложимой, если найдутся такие перестановочные матрицы P и Q, что матрица PAQ имеет вид $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, где матрицы B и D квадратные. Если матрица не является частично разложимой, то она называется вполне неразложимой. Если перестановкой строк и столбцов матрицу можно привести к блочно-диагональному виду с квадратными диагональными блоками $B_1, B_2, \ldots, B_m$, то будем говорить, что матрица A есть прямая сумма матриц $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Множество всех перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$ обозначим через S, а через S_{ij} обозначим множество перестановок, у которых $\nu_i = j$.

Перманентом матрицы A (см. ([3])) называется число $\operatorname{per} A = \sum_{\nu \in S} \prod_{i=1}^{n} a_{i\nu_i}$. Произведения $\prod_{i=1}^{n} a_{i\nu_i}$ будем называть членами перманента. Через A_{ij} обозначим подматрицу матрицы A, получающуюся из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Множество пар (i, j), для которых $a_{ij} > 0$, обозначим через $R(A)$.

Множество бистохастических матриц (т. е. таких неотрицательных матриц, суммы элементов строчек и столбцов которых равны единице) обозначим через Ω.

Будем говорить, что две неотрицательные матрицы A и B имеют одинаковую схему, если $R(A) = R(B)$. Далее, будем говорить, что матрица A имеет бистохастическую схему, если существует бистохастическая матрица X, имеющая одинаковую схему с A.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1°) *Матрица A имеет бистохастическую схему.*

2°) *Матрица A есть прямая сумма вполне неразложимых матриц.*

3°) *Если $a_{ij} > 0$, то найдется перестановка ν, для которой $\nu_i = j$ и $a_{k\nu_k} > 0$, $k \in 1:n$.*

4°) *Существуют такие диагональные матрицы U и V с положительными элементами на главной диагонали, что матрица $B = UAV$ является бистохастической. При этом матрица B определяется единственным образом и является решением следующей экстремальной задачи:*

Найти

$$\min \sum_{i,\, j=1}^{n} x_{ij} (\ln x_{ij} - \ln a_{ij}) \tag{7}$$

при условиях $X \in \Omega$; $x_{ij} = 0$, если $a_{ij} = 0$.

Эквивалентность 1° — 3° доказана в ([4]), существование бистохастической матрицы $B = UAV$ доказано в ([5, 6]), а то, что B является решением задачи (7), следует из леммы 1.

Лемма 2. *Пусть матрица A имеет бистохастическую схему и все отличные от нуля члены перманента матрицы A равны между собой. Тогда нулевые элементы матрицы A можно таким образом заменить положительными числами, что полученная матрица будет иметь ранг 1.*

Теорема 2. *Для всякой бистохастической матрицы X найдется единственная бистохастическая матрица Y, для которой*

$$x_{ij} = (y_{ij} \cdot \operatorname{per} Y_{ij}) \,/\, \operatorname{per} Y, \quad i, j \in 1:n. \tag{8}$$

При этом матрица Y имеет ту же схему, что и X.

Доказательство теоремы основано на анализе следующей экстремальной задачи:

минимизировать

$$f(\alpha)=\sum_{\nu\in S}\alpha_\nu\ln\alpha_\nu \tag{9}$$

при условиях

$$\sum_{\nu\in S}\alpha_\nu=1;\qquad \sum_{\nu\in S_{ij}}\alpha_\nu=x_{ij},\qquad i,j\in 1:n;$$

$$\alpha_\nu\geqslant 0,\qquad \nu\in S.$$

Выписывая двойственную для (9) задачу и применяя лемму 1 и теорему 1, можно показать, что существует матрица Y, удовлетворяющая (8). При этом $\alpha_\nu=(\operatorname{per}Y)^{-1}\prod\limits_{i=1}^{n}y_{i\nu_i}$ образуют решение задачи (9). Единственность матрицы Y доказывается с помощью леммы 2.

Таким образом, с помощью равенства (8) каждому $X\in\Omega$ ставится в соответствие $Y=T(X)\in\Omega$, т.е. на Ω задается взаимно однозначное отображение T.

Теорема 3. *Для любого $X\in\Omega$ имеет место* $\operatorname{per}T(X)\leqslant\operatorname{per}X$, *причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда* $T(X)=X$.

Эта теорема доказывается с помощью следующих лемм.

Лемма 3. *Пусть Z — неотрицательная матрица и* $\operatorname{per}Z>0$. *Положим* $\alpha_\nu=(\operatorname{per}Z)^{-1}\prod\limits_{i=1}^{n}z_{i\nu_i}$. *Тогда*

$$\sum_{\nu\in S}\alpha_\nu\ln\alpha_\nu=\sum_{i,\,j=1}^{n}z_{ij}\ln z_{ij}\cdot\operatorname{per}Z_{ij}(\operatorname{per}Z)^{-1}-\ln\operatorname{per}Z.$$

Утверждение этой леммы проверяется непосредственно.

Лемма 4. *Если X – бистохастическая матрица, $Y=T(X)$, а Z – неотрицательная матрица, то*

$$\operatorname{per}Z\geqslant\operatorname{per}Y\cdot\prod_{i,\,j=1}^{n}(z_{ij}/y_{ij})^{x_{ij}}$$

(если $y_{ij}=0$, то и $x_{ij}=0$, и выражение $(z_{ij}/y_{ij})^{x_{ij}}$ в этом случае считаем равным единице).

Утверждение леммы доказывается с помощью неравенства (6), примененного к задаче (9).

Пользуясь теоремой 3, можно найти оценку сверху для перманента квадратной (0, 1)-матрицы.

Обозначим через r_i сумму элементов i-й строки (0, 1)-матрицы A. Минк ([1]) предположил, что имеет место неравенство

$$\operatorname{per}A\leqslant\prod_{i=1}^{n}(r_i!)^{1/r_i}. \tag{10}$$

Ранее (см. ([1], [7–9])) были получены некоторые другие, более слабые, оценки сверху для перманентов (0, 1)-матриц.

Лемма 5. *Пусть матрица A имеет бистохастическую схему, $X^*=U^*AV^*$ — бистохастическая матрица, U^* и V^* — диагональные матрицы с положительными элементами u_i^* и v_i^* на главной диагонали.*

Тогда для любых неотрицательных чисел u_i и v_i, $i\in 1:n$, имеет место неравенство

$$\prod_{i=1}^{n}u_i^*v_i^*\geqslant\Bigl(\prod_{i=1}^{n}u_iv_i\Bigr)\cdot\exp\Bigl(n-\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}u_iv_j\Bigr).$$

Доказательство леммы 4 получается путем применения неравенства (6) к задаче (7).

Теорема 4. *Пусть A — квадратная* (0, 1)*-матрица и r_i — сумма элементов i-й строки. Тогда имеет место* (10).

Доказательство будем вести индукцией по порядку матрицы. Для матриц второго порядка (10) проверяется непосредственно. Предположим, что (10) выполнено для матриц, порядок которых меньше n.

Пусть A — (0, 1)-матрица порядка n. Если A частично разложима, то неравенство (10) устанавливается без труда.

Пусть матрица A вполне неразложима. Положим

$$x_{ij} = (a_{ij} \operatorname{per} A_{ij}) \,/ \operatorname{per} A, \quad i, j \in 1:n.$$

Тогда из теоремы 3 и леммы 5 нетрудно вывести, что

$$\operatorname{per} X \geqslant \operatorname{per} A \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1}. \tag{11}$$

С другой стороны,

$$\operatorname{per} X = \sum_{\nu \in S} \prod_{i=1}^{n} x_{i\nu_i} = (\operatorname{per} A)^{-n} \sum_{\nu \in S} \prod_{i=1}^{n} a_{i\nu_i} \operatorname{per} A_{i\nu_i}.$$

Оценивая последнее выражение сверху с помощью индукционного предположения, получим

$$\operatorname{per} X \leqslant (\operatorname{per} A)^{1-n} \prod_{i=1}^{n} (r_i - 1)!\, (r_i!)^{(n-r_i)/r_i}.$$

Отсюда и из (11) и следует утверждение теоремы.

Теорема 5. *Равенство в* (10) *достигается в том и только том случае, когда A есть прямая сумма матриц, целиком состоящих из единиц.*

Следствие. *Рассмотрим экстремальную задачу: среди* (0, 1)*-матриц порядка n, имеющих данный набор сумм элементов строк $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$, найти матрицу с максимальным значением перманента. Пусть q_j, $j \in 1:n$, означает количество чисел из набора r, равных j, и предположим, что q_j делится на j.*

Тогда матрица, на которой достигается максимальное значение перманента, представляет собой прямую сумму матриц, целиком состоящих из единиц, и такая матрица единственная, с точностью до перестановок строк и столбцов.

В частности, справедливо предположение Райзера (см. [3]) о том, что среди (0, 1)-матриц порядка mk, имеющих k единиц в каждой строке и в каждом столбце, максимальное значение перманента имеет матрица, являющаяся прямой суммой m матриц порядка k, целиком состоящих из единиц.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
16 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Minc, Bull. Am. Math. Soc., 69, № 6, 789 (1963). [2] Л. М. Брэгман, И. Н. Фокин, ДАН, 188, № 5, 974 (1969). [3] M. Marcus, H. Minc, Am. Math. Monthly, 72, № 6, 577 (1965). [4] L. Mirsky, H. Perfect, J. London Math. Soc., 40, № 4, 689 (1965). [5] R. Sinkhorn, P. Knopp, Pacif. J. Math., 21, № 2, 343 (1967). [6] D. London, J. Math. Anal. Appl., 34, № 3, 648 (1971). [7] W. B. Jurkat, H. J. Ryser, J. Algebra, 3, № 1, 1 (1966). [8] H. Minc, J. Combin. Theory, 2, № 3, 321 (1967). [9] A. Nijenhuis, H. S. Wilf, Ind. Math., 32, № 2, 151 (1970).