Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 3

УДК 550.311 ГЕОФИЗИКА

С. Ц. АКОПЯН, В. Н. ЖАРКОВ, В. М. ЛЮБИМОВ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗЕМЛИ. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

(Представлено академиком М. А. Садовским 2 VIII 1972)

1. В работе (1) была построена теория возмущений во втором приближении для крутильных колебаний Земли. Ниже построена теория возмущений для радиальных колебаний Земли во втором приближении.

2. В простейшем случае однородной сферы $\rho=\bar\rho=\text{const}$, $\lambda=\bar\lambda=\text{const}$, $\mu=\bar\mu=\text{const}$ безразмерная частота, определяется по формуле $\varkappa^2 = a^2\bar\rho(\omega^2+4A)/(\bar\lambda+2\bar\mu)$, где a — радиус Земли, ω — рассматриваемая собственная частота, ρ — плотность, μ — модуль сдвига, $\lambda=K-{}^2/_3\mu$ — постоянная Лямэ, K — модуль сжатия. Существенно, что в этом случае ускорение силы тяжести линейно зависит от радиуса: $g_0=Ar$, $A={}^4/_3\pi G\rho_0$ (2, 3). Влияние гравитации на собственную частоту проявляется через множитель A в $\varkappa^2$. Частота $\varkappa$ определяется как корень характеристического уравнения (3)

$$\frac{\operatorname{tg}\varkappa}{\varkappa}=\frac{1}{1-{}^1/_4\varkappa^2(2+\lambda/\mu)}. \tag{1}$$

Зададим параметрам $\bar\rho$, $\bar\mu$, $\bar\lambda$ слабые возмущения $\bar\rho\to\rho_0(1+R)$, $\bar\mu\to\mu_0(1+M)$, $\bar\lambda\to\lambda_0(1+\Lambda)$. Тогда частота ω также изменится: $\omega\to\omega_0(1+\Omega_1+\Omega_2)$; Ω_1 и Ω_2 — величины первого и второго порядка малости соответственно.

Корень уравнения (1) сохраняет свое значение и при наличии возмущений, поэтому

$$\Omega_1=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{8A}{\omega_0^2}\right)R-\frac{1}{4}\left(1+\frac{4A}{\omega_0^2}\right)\frac{K_0K+{}^4/_3\mu_0M}{K_0+{}^4/_3\mu_0},$$

$$\Omega_2=-\frac{1}{8}\left(1+\frac{8A}{\omega_0^2}\right)^2R^2-\frac{1}{4}\left(1+\frac{4A}{\omega_0^2}\right)\left(1-\frac{8A}{\omega_0^2}\right)\frac{K_0K+{}^4/_3\mu_0M}{K_0+{}^4/_3\mu_0}R-$$
$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{4A}{\omega_0^2}\right)^2\left(\frac{K_0K+{}^4/_3\mu_0M}{K_0+{}^4/_3\mu_0}\right)^2, \tag{2}$$

где $K_0=\lambda_0+{}^2/_3\mu_0$, $A={}^4/_3\pi G\rho_0$, а K — малая добавка к K_0.

3. В общем случае радиальных колебаний отлична от нуля лишь одна компонента вектора смещения $\mathbf{u}(u, v, w)$:

$$u=u(r),\quad v=w=0. \tag{3}$$

Она удовлетворяет уравнению (3)

$$\rho_0\omega_0^2u+\frac{4}{r}\rho_0g_0u+\frac{d}{dr}\left[\lambda\left(\dot u+\frac{2u}{r}\right)+2\mu_0\dot u\right]+\frac{4\mu_0}{r}\left(\dot u-\frac{u}{r}\right)=0; \tag{4}$$

здесь μ, ρ, λ — кусочно-гладкие функции, u — непрерывная функция. Индекс (l — номер обертона) у ω и u, где это не вызывается необходимостью, и в дальнейшем будем опускать.

Собственная частота выбирается так, чтобы решение (4) удовлетворяло граничным условиям

$$u=0 \text{ при } r=0\qquad (\lambda+2\mu)\dot u+\frac{2}{r}\lambda u=0 \text{ при } r=a, \tag{5}$$

а g_0 удовлетворяет уравнению

$$g_0=\frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r\rho_0r^2dr. \tag{6}$$

Докажем ортогональность функций $u(r)$. Для этого стандартным образом образуем билинейные комбинации на основе (4) для l-й и k-й частот. Тогда

$$(\omega_k^2-\omega_l^2)\int_0^a \rho_0 u_l u_k r^2 dr = \int_0^a r^2\,dr\left[u_k\frac{d}{dr}\left[\lambda\left(\dot u_l+\frac{2u_l}{r}\right)+2\mu\dot u_l\right]+\frac{4\mu}{r}\dot u_l u_k\right\}-$$

$$-\int_0^a r^2\,dr\left\{u_l\frac{d}{dr}\left[\lambda\left(\dot u_k+\frac{2u_k}{r}\right)+2\mu\dot u_k\right]+\frac{4\mu}{r}\dot u_k u_l\right\}. \qquad (7)$$

Интегрируя по частям и применяя граничные условия (5), легко показать, что правая часть (7) равна нулю. Следовательно,

$$\int_0^a \rho(r)\,u_l u_k r^2\,dr = I_l\delta_{lk}, \qquad (8)$$

где δ_{lk} — символ Кронекера, а I_l положим равным единице, считая формы u_l нормированным с весовой функцией $\rho(r)$.

Перейдем к безразмерным переменным [2]

$$r=ax,\quad u=aV,\quad \mu^0=\bar\mu\mu,\quad K^0=\bar K K,\quad \rho^0=\bar\rho\rho,$$
$$\varkappa^2=\omega^2a^2\bar\rho/\bar K,\quad N=\bar\mu/\bar K,\quad \nu=\bar\rho\bar g a/\bar K,\quad D=4\pi G\bar\rho a/\bar g, \qquad (9)$$

где r — текущий радиус; a — радиус Земли; величины с индексом нуль — размерные параметры модели (μ^0, K^0, ρ^0); величины с чертой — некоторые нормирующие постоянные ($\bar\mu$, $\bar K$, $\bar\rho$, $\bar g$); ω и $\varkappa$ — размерная и безразмерная частоты. Тогда (4) и (5) примут вид

$$-\frac{d}{dx}\left[K\left(\dot V+\frac{2V}{x}\right)+\frac{4}{3}\mu N\left(\dot V-\frac{V}{x}\right)\right]=\rho\varkappa^2V+\frac{4}{x}\rho g\nu V+\frac{4}{x}\mu N\left(\dot V-\frac{V}{x}\right), \qquad (4')$$

$$V=0 \text{ при } x=0,\qquad K\left(\dot V+\frac{2V}{x}\right)+\frac{4}{3}\mu N\left(\dot V-\frac{V}{x}\right)=0 \text{ при } x=1. \qquad (5')$$

Условие ортогональности в новых переменных будет

$$\int_0^1\rho(x)\,V_lV_kx^2\,dx=\delta_{lk}. \qquad (8')$$

Зададим возмущения безразмерным функциям $\rho(x)$, $\mu(x)$, $K(x)$:

$$\rho(x)=\rho_0(x)[1+\varepsilon R(x)],\quad \mu(x)=\mu_0(x)[1+\varepsilon M(x)],\quad K(x)=$$
$$=K_0(x)[1+\varepsilon K_1(x)]; \qquad (10)$$

тогда

$$g(x)=g_0(x)[1+\varepsilon g_1(x)],\qquad g_1(x)=\frac{D}{g_0x^2}\int_0^x\rho_0Rx^2dx; \qquad (11)$$

ε обозначает «параметр возмущения». Будем строить теорию возмущений граничной задачи (4′), (5′) по методу, изложенному в [1].

Разложим частоту $\varkappa$ и функцию V по ε:

$$\varkappa_l=\varkappa_{0l}(1+\varepsilon\Omega_{1l}+\varepsilon^2\Omega_{2l}+\ldots),\qquad V_l=V_{0l}+\varepsilon V_{1l}+\varepsilon^2V_{2l}+\ldots \qquad (12)$$

Подставим (10) и (12) в (4′) и приравняем члены при одинаковых степенях ε. Тогда получим соответственно уравнения для V_{0l}, V_{1l} и V_{2l}:

$$-\frac{d}{dx}\left[K_0\left(\dot V_0+\frac{2V_0}{x}\right)+\frac{4}{3}\mu_0N\left(\dot V_0-\frac{V_0}{x}\right)\right]=\rho_0\varkappa_0^2V_0+$$
$$+\frac{4}{x}\rho_0g_0\nu V_0+\frac{4}{x}\mu_0N\left(\dot V_0-\frac{V_0}{x}\right); \qquad (I)$$

$$-\frac{d}{dx}\left[K_0\left(\dot V_1+\frac{2V_1}{x}\right)+\frac{4}{3}\mu_0N\left(\dot V_1-\frac{V_1}{x}\right)+K_0K\left(\dot V_0+\frac{2V_0}{x}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}\mu_0MN\left(\dot V_0-\frac{V_0}{x}\right)\right]=\rho_0\varkappa_0^2(V_1+RV_0+2\Omega_1V_0)+$$

$$+\frac{4}{x}\rho_0 g_0 \nu (V_1 + RV_0 + V_0 g_1) + \frac{4\mu_0 N}{x}\left[\dot V_1 - \frac{V_1}{x} + M\left(\dot V_0 - \frac{V_0}{x}\right)\right]; \quad \text{(II)}$$

$$-\frac{d}{dx}\left[K_0\left(\dot V_2 + \frac{2V_2}{x} + \frac{4}{3}\mu_0 N\left(\dot V_2 - \frac{V_2}{x}\right)\right) + K_0 K\left(\dot V_1 + \frac{2V_1}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\mu_0 MN\left(\dot V_1 - \frac{V_1}{x}\right)\right] = \rho_0 \varkappa_0^2 (V_2 + V_0\Omega_1^2 + 2\Omega_2 V_0 + 2\Omega_1 RV_0 +$$
$$+ 2V_1\Omega_1 + RV_1) + \frac{4}{x}\rho_0 g_0 \nu (V_2 + RV_1 + g_1 V_1 + RV_0 g_1) +$$
$$+ \frac{4\mu_0 N}{x}\left[\dot V_2 - \frac{V_2}{x} + M\left(\dot V_1 - \frac{V_1}{x}\right)\right]. \quad \text{(III)}$$

В (I)—(III) слева под знаком производной стоят непрерывные функции (в соответствующем приближении). Для получения формул первого приближения используем уравнения (I) и (II). Разложим функции V_{1l} по собственным функциям нулевого приближения

$$V_{1l} = \sum_k a_{lk} V_{0k}. \quad (13)$$

Умножим уравнение (I) с индексом j на V_{1l}, а (II) с индексом l на V_{0j}. Образуем разность и проинтегрируем от 0 до 1. После интегрирования по частям и использования граничных условий, подстановки (13) с учетом ортогональности, найдем

$$(\varkappa_{0j}^2 - \varkappa_{0l}^2)\, a_{lj} - \varkappa_{0l}^2 \int_0^1 \rho_0 (R + 2\Omega_{1l}) V_{0l} V_{0j} x^2\, dx - \int_0^1 4\mu_0 MNx\, dx\, V_{0j}\left(\dot V_{0l} - \frac{V_{0l}}{x}\right) -$$
$$- \int_0^1 4\rho_0 g_0 \nu (R + g_1) V_{0l} V_{0j} x\, dx + \int_0^1 \left[K_0 K\left(\dot V_{0l} + \frac{2V_{0l}}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\mu_0 MN\left(\dot V_{0l} - \frac{V_{0l}}{x}\right)\right]\frac{d}{dx}(x^2 V_{0j})\, dx = 0, \quad (14)$$

при $l = j$, учитывая (11), имеем

$$\Omega_{1l} = -\frac{1}{2\varkappa_{0l}^2}\int_0^1 x^2\, dx\, V_{0l}^2 \left(\varkappa_{0l}^2 + \frac{4\nu g_0}{x}\right)\rho_0 R - \frac{2\nu D}{\varkappa_{0l}^2}\int_0^1 \rho_0 V_{0l}^2 \frac{dx}{x}\int_0^x \rho_0 R x^2\, dx + \quad (15)$$
$$+ \frac{1}{2\varkappa_{0l}^2}\int_0^1 x^2\, dx K_0 K\left(\dot V_{0l} + \frac{2V_{0l}}{x}\right)^2 + \frac{2N}{3\varkappa_{0l}^2}\int_0^1 x^2\, dx\, \mu_0 M\left[\left(\dot V_{0l} - \frac{V_{0l}}{x}\right)^2 + \frac{V_{0l}^2}{x^2}\right];$$

при $l \neq j$ из (14) получаем

$$a_{lj} = \frac{1}{\varkappa_{0j}^2 - \varkappa_{0l}^2}\left\{\varkappa_{0l}^2 \int_0^1 \rho_0 R x^2\, dx V_{0l} V_{0j} + 4N\int_0^1 \mu_0 Mx\, dx\left(\dot V_{0l} - \frac{V_{0l}}{x}\right)V_{0j} + \right.$$
$$+ 4\nu\int_0^1 \rho_0 g_0 x\, dx\, RV_{0l}V_{0j} + 4\nu D\int_0^1 \rho_0 V_{0l} V_{0j}\frac{dx}{x}\int_0^x \rho_0 R x^2\, dx -$$
$$\left. - \int_0^1 \left[K_0 K\left(\dot V_{0l} + \frac{2}{x}V_{0l}\right) + \frac{4N}{3}\mu_0 M\left(\dot V_{0l} - \frac{V_{0l}}{x}\right)\right]\frac{d}{dx}(x^2 V_{0j})\, dx\right\}. \quad (16)$$

Коэффициент a_{ll} оказывается неопределенным. Определим его так, чтобы условие нормировки (8′) выполнялось с точностью до членов первого порядка. Тогда

$$a_{ll} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \rho_0 R V_{0l}^2 x^2 dx. \quad (17)$$

Теория возмущений во втором приближении строится аналогичным образом. Раскладываем V_{2l} по функциям V_{0k}:

$$V_{2l} = \sum_k b_{lk} V_{0k}. \tag{18}$$

Затем, произведя с уравнениями (I) и (III) те же преобразования, что и при получении (14), найдем

$$(\varkappa_{0l}^2 - \varkappa_{0j}^2)\, b_{lj} - 2\Omega_{2l}\varkappa_{0l}^2\delta_{lj} - \Omega_{1l}^2\varkappa_{0l}^2\delta_{lj} - 2\Omega_{1l}\varkappa_{0l}^2 a_{lj} -$$
$$- 2\Omega_{1l}\varkappa_{0l}^2 \int_0^1 V_{0l}V_{0j}x^2\, dx\, \rho_0 R + 2\Omega_{1j}\varkappa_{0j}^2 a_{lj} - 4\nu \int_0^1 \rho_0 g_0 R g_1 V_{0l} V_{0j}\, x\, dx +$$
$$+ \sum_k (\varkappa_{0j}^2 - \varkappa_{0k}^2)\, a_{lk} a_{jk} + (\varkappa_{0j}^2 - \varkappa_{0j}^2) \sum_k a_{lk} \int_0^1 x^2\, dx\, V_{0j} V_{0k} \rho_0 R = 0. \tag{19}$$

Полагая $l = j$, определим изменение частот во втором приближении:

$$\Omega_{2l} = -\, {}^1\!/_2\Omega_{1l}^2 + 2\Omega_{1l} a_{ll} +$$
$$+ \frac{1}{2\varkappa_{0l}^2} \sum_k (\varkappa_{0l}^2 - \varkappa_{0k}^2)\, a_{lk}^2 - \frac{2\nu D}{\varkappa_{0l}^2} \int_0^1 \rho_0 R V_{0l}^2 \frac{dx}{x} \int_0^x \rho_0 R x^2\, dx. \tag{20}$$

При $l \neq j$ из (19) найдем все b_{lj}, исключая b_{ll}:

$$b_{lj} = \frac{1}{\varkappa_{0j}^2 - \varkappa_{0l}^2} \Big\{ 2\Omega_{1l}\varkappa_{0l}^2 \int_0^1 x^2\, dx\, V_{0l} V_{0j} \rho_0 R + 2a_{lj}\,(\varkappa_{0l}^2 \Omega_{1l} - \varkappa_{0j}^2 \Omega_{1j}) +$$
$$+ 4\nu D \int_0^1 \rho_0 R V_{0l} V_{0j} \frac{dx}{x} \int_0^x \rho_0 R x^2\, dx - \sum_k (\varkappa_{0j}^2 - \varkappa_{0k}^2)\, a_{lk} a_{jk} -$$
$$- (\varkappa_{0j}^2 - \varkappa_{0l}^2) \sum_k a_{lk} \int_0^1 x^2\, dx\, V_{0j} V_{0k} \rho_0 R \Big\}. \tag{21}$$

Коэффициент b_{ll} определим из условия сохранения нормировки (8′) с точностью до членов второго порядка включительно:

$$b_{ll} = -\frac{1}{2} \Big\{ \sum_k a_{lk}^2 + \sum_k a_{lk} \int_0^1 x^2\, dx\, V_{0l} V_{0k} \rho_0 R \Big\}. \tag{22}$$

В простейшем случае однородной сферы (15) и (20) переходят в (2). При выводе всех соотношений считалось, что R, M, K принадлежат к тому же классу функций, что и ρ_0, μ_0, K_0. Чтобы избежать почленного дифференцирования рядов (13) и (18), мы везде освобождались от производных путем предварительного интегрирования по частям.

Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Ц. Акопян, В. Н. Жарков, В. М. Любимов, ДАН, **204**, № 3 (1972). [2] В. Н. Жарков, В. М. Любимов, ДАН, **177**, № 2 (1967). [3] В. Н. Жарков, В. Л. Паньков и др., Введение в физику Луны, гл. 7, «Наука», 1969.