Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ Ю. В. ЛИННИКА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 26 X 1972)

В связи с работой С. Р. Рао [1] Ю. В. Линник поставил следующий вопрос: существуют ли две случайные величины X и Y с конечными дисперсиями такие, что выполняется соотношение

$$\varphi_Y(t) = \psi_X(t) \exp t^4, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где $\varphi_X(t)$ и $\varphi_Y(t)$ — характеристические функции для X и Y? Ю. В. Линник отметил, что без требования конечности дисперсий существование случайных величин, характеристические функции которых связаны равенством (1), вытекает из одного результата его работы [2]. Здесь будет доказана теорема, содержащая утвердительный ответ на вопрос Ю. В. Линника. Я глубоко благодарен И. В. Островскому, который сообщил мне о задаче Ю. В. Линника, указал на ее связь с теорией целых функций и оказывал всестороннюю помощь.

Теорема. *Пусть $P(t)$ — заданный четный многочлен с действительными коэффициентами, $P(0) = 0$. Существуют две случайные величины X и Y, обладающие моментами всех порядков, такие, что выполняется соотношение*

$$\varphi_Y(t) = e^{P(t)}\varphi_X(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{2}$$

Через A_j всюду ниже обозначаем положительные абсолютные постоянные.

Лемма. *Существует целая функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям*

$$0 < f(x) \leqslant A_1 \exp\{-A_2 \ln^2(|x| + 1)\}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{3}$$

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant A_3 f(x) \exp\{A_4 k\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Покажем сначала, как из леммы выводится теорема. Пусть $f(z)$ — целая функция, удовлетворяющая условиям (3) и (4), $P(t)$ — четный многочлен степени $2n$ с действительными коэффициентами, абсолютные значения которых меньше числа a, $P(0) = 0$. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, $D = d/dx$, $-\infty < x < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$ Из (4) следует, что

$$\begin{gathered} |f_k(x)| = |P^k(\varepsilon i D) f(x)| \leqslant A_3 f(x) (\varepsilon^2 b_n)^k, \\ b_n = an \exp(2A_4 n). \end{gathered} \tag{5}$$

Положим $g_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)/k!$. В силу (5) ряд сходится абсолютно и выполняется

$$g_\varepsilon(x) \leqslant A_3 f(x) \exp(\varepsilon^2 b_n), \tag{6}$$

$$g_\varepsilon(x) \geqslant f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|/k! \geqslant f(x)\{1 - A_3(\exp(\varepsilon^2 b_n) - 1)\}. \tag{7}$$

Выбираем ε настолько малым, чтобы выражение в фигурных скобках в (7) было положительным. Тогда $g_\varepsilon(x) > 0$ при $-\infty < x < \infty$. Рассмотрим функции $p_X(x) = B_1\varepsilon f(\varepsilon x)$, $p_Y(x) = B_2\varepsilon g_\varepsilon(\varepsilon x)$, где положительные постоянные B_1 и B_2 выбраны так, чтобы интегралы $p_X(x)$ и $p_Y(x)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равнялись 1 (сходимость следует из (3) и (6)). Функции $p_X(x)$ и $p_Y(x)$ являются вероятностными плотностями. Обозначим соответствующие случайные величины через X и Y. В силу (3) и (6) эти величины обладают моментами всех порядков. Покажем, что выполняется (2). Используя (3) и интегрируя q раз по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(iD)^q f(x)\,dx = t^q \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx, \quad q = 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx/\varepsilon} f_k(x)\,dx = P^k(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx/\varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$\varphi_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_Y(x)\,dx = B_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx/\varepsilon} g_\varepsilon(x)\,dx =$$

$$= B_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx/\varepsilon} f_k(x)\,dx = B_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k(t)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx/\varepsilon} f(x)\,dx =$$

$$= B_2 e^{P(t)} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(\varepsilon x)\,dx = (B_2/B_1)\, e^{P(t)} \varphi_X(t). \tag{8}$$

Так как $\varphi_Y(0) = \varphi_X(0) = 1$, то из (8) следует, что $B_2 = B_1$, и (2) доказано.

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть целую функцию

$$f(z) = \{\operatorname{ch} 2\pi - \cos 2\pi z\}/\psi(z), \ \psi(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \{(1 - z\cdot 16^{-n})^2 + 16^{-2n}\}.$$

Очевидно, что при $-\infty < x < \infty$ выполняется $f(x) > 0$. При $m = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим

$$R_m = \{z\colon\ 9^{-1}\cdot 16^m < |z| \leqslant 9\cdot 16^m\},$$

$$R_m' = \{z\colon\ 8^{-1}\cdot 16^m < |z| \leqslant 8\cdot 16^m\}, \quad R_m'' = \{z\colon\ 4^{-1}\cdot 16^m < |z| \leqslant 4\cdot 16^m\},$$

$$C_m = \{z\colon\ |z - 16^m\cdot 3\cdot 2^{-1}| < 16^m\}.$$

Очевидно, $C_m \subset R_m''$.

Будем обозначать через $\omega(z, E)$ любые функции, вообще разные, модуль которых при $z \in E$ ограничен сверху и снизу положительными постоянными, не зависящими от m.

Пусть

$$g(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - 16^{-n}z), \quad S(z) = g(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{-1}\cdot 16^{-n}) = g(z)\,\omega(z, \{|z| \geqslant 1\}).$$

Из функционального уравнения $S(16z) = -16zS(z)$ (см. ([3]), стр. 224) выводим

$$S(z) = (-1)^m\cdot 16^{(-m^2+m)/2} z^m S(z\cdot 16^{-m}).$$

Так как $S(z) = (z-1)\omega(z, R_0)$ и $\psi(z) = g(z-i)g(z+i)$, то при $z \in R_m$, $m \geqslant 2$, имеем

$$|g(z)| = |S(z)|\omega(z, R_m) = 16^{-(m^2+m)/2}|z|^m|z-16^m|\omega(z, R_m),$$

а при $z \in R_m'$

$$|\psi(z)| = 16^{-(m^2+m)}|z^2+1|^m|(z-16^m)^2+1|\omega(z, R_m'). \tag{9}$$

Поскольку при $x \in R_m'$ выполняется $\ln|x| - \ln 8 < m \ln 16 < \ln|x| + \ln 8$, то из (9) легко вывести, что при действительных x, $|x| \geqslant 2^{32}$, выполняется $\psi(x) \geqslant A_5 \exp\{\ln^2|x| / (2\ln 16)\}$, откуда сразу вытекает (3).

Пусть $-\infty < x_0 < \infty$, $r > 0$. Обозначим через $\Gamma(x_0, r)$ контур квадрата с вершинами в точках $x_0 \pm r$, $x_0 \pm ir$. Определим теперь для всех x_0 и $k = 1, 2, \ldots$ числа $r_k = r_k(x_0)$ следующим образом.

А) Если $|x_0| \leqslant 64$, то r_k равно наименьшему натуральному числу s, для которого $s \geqslant k$, $s \geqslant 16^3$ и $x_0 + s \notin \bigcup\limits_{j=3}^{\infty} [2^{-1}\cdot 16^j, 3\cdot 16^j]$.

Б) Если $x_0 \in R_m''$, $m \geqslant 2$, и $k \geqslant 16^{m-1}$, то r_k равно наименьшему натуральному числу s, для которого $s \geqslant k$, $s \geqslant 16^{m+1}$ и $x_0 + s \notin \bigcup\limits_{j=m+1}^{\infty} [2^{-1}\cdot 16^j; 3\cdot 16^j]$.

В) Если $x_0 \in R_m''$, $m \geqslant 2$, и $k < 16^{m-1}$, то $r_k = k$ при $|x_0 \pm k - 16^m| \geqslant 4$ и $r_k = k+8$ в противном случае.

Из определения r_k следует, что всегда $k \leqslant r_k \leqslant A_6 k + A_7$, а также, что в случае А) $\Gamma(x_0, r_k) \subset \bigcup\limits_{j=3}^{\infty} \{R_j'' \setminus C_j\}$, в случае Б) $\Gamma(x_0, r_k) \subset \bigcup\limits_{j=m+1}^{\infty} \{R_j'' \setminus C_j\}$, в случае В) $\Gamma(x_0, r_k) \subset R_m'$. При $z \in R_m' \setminus C_m$ выполняется $|(z-16^m)^2 + 1| = 16^{2m}\omega(z, R_m' \setminus C_m)$ и из (9) следует

$$|\psi(z)| = 16^{-m^2+m}|z^2+1|^m\omega(z, R_m' \setminus C_m). \tag{10}$$

Покажем, что $(z = x+iy)$

$$\min_{z \in \Gamma(x_0, r_k)} |\psi(z)|\exp\{2\pi|x-x_0|\} \geqslant A_8\psi(x_0). \tag{11}$$

В случае В) на $\Gamma(x_0, r_k)$ выполняется $|z-16^m| \geqslant 2$ и $|(z-16^m)^2+1| \geqslant 2^{-1}\{(x-16^m)^2+1\}$, а также $|z^2+1| \geqslant x^2+1$, поэтому, в силу (9),

$$\begin{aligned}&|\psi(z)|\exp\{2\pi|x-x_0|\} \geqslant\\ &\geqslant A_9\exp\{2\pi|x-x_0|\}16^{-(m^2+m)}(x^2+1)^m((x-16^m)^2+1) \geqslant\\ &\geqslant A_9 16^{-(m^2+m)}(x_0^2+1)^m((x_0-16^m)^2+1) \geqslant A_8\psi(x_0).\end{aligned}$$

В случае Б) пусть $z \in R_{m+j}''$, $j = j(z) \geqslant 1$. Тогда $|x_0| \leqslant 4\cdot 16^m$, $|z| > 4^{-1}\cdot 16^{m+j}$ и в силу (10)

$$\begin{aligned}&\frac{|\psi(z)|}{\psi(x_0)} \geqslant A_{10}\frac{16^{-(m+j)^2+(m+j)}|z^2+1|^{m+j}}{16^{-m^2+m}(x_0^2+1)^m} \geqslant\\ &\geqslant A_{11}\frac{16^{-(m+j)^2+(m+j)}4^{-2(m+j)}16^{2(m+j)^2}}{16^{-m^2+m}4^{2m}16^{2m^2}} = A_{11}\cdot 16^{2m(j-1)+j^2} \geqslant A_{11},\end{aligned}$$

а это сильнее неравенства (1).

Случай А) рассматривается аналогично.

Так как при $z = x+iy \in \Gamma(x_0, r_k)$ справедливо

$$|\operatorname{ch} 2\pi - \cos 2\pi z| \leqslant A_{12}\exp\{2\pi(r_k - |x-x_0|)\},$$

то, учитывая (11), получаем

$$\max_{z \in \Gamma(x_0,\, r_k)} |f(z)| \leqslant A_{13} f(x_0) \exp\{2\pi r_k\}.$$

Отсюда

$$|f^{(k)}(x_0)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(x_0,\, r_k)} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - x_0)^{k+1}} \right| \leqslant A_{13} \frac{k!}{2\pi} \exp\{2\pi r_k\} f(x_0) \cdot 4 r_k^{-k} \left(\sqrt{2}\right)^{k+2} \leqslant$$

$$\leqslant A_{14} k! k^{-k} \exp\{2\pi A_6 k\} f(x_0) \leqslant A_3 f(x_0) \exp\{A_4 k\},$$

т.е. доказано (4).

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило
17 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. R. Rao, Sankhya, Ser. A, 33, 265 (1971). [2] Ю. В. Линник, Укр. матем. журн., 5, № 3, 247 (1953). [3] Ж. Валирон, Аналитические функции, М., 1957.