Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 4

УДК 550.383+523.72 ФИЗИКА

В. П. ШАБАНСКИЙ, $\boxed{\text{А. Р. ШИСТЕР}}$

СВЕРХЗВУКОВОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ ИЗ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

(Представлено академиком С. Н. Верновым 28 IX 1972)

В ряде задач магнитной гидродинамики кинетическая энергия газового потока существенно превышает тепловую и магнитную энергию. Из системы уравнений выделяется уравнение для скорости, которая и определяет пространственно-временное распределение других параметров плазмы. При подобных предположениях ([1], [2]) была решена задача об азимутально несимметричном солнечном ветре для случая стационарной картины во вращающейся с солнцем системе координат. В данной заметке мы получим общее решение соответствующей краевой задачи и задачи с начальными условиями при произвольной зависимости граничных значений параметров. Ниже будет показано, что задача о радиальном испускании частиц с поверхности вращающегося шара при определенных условиях сводится к одномерному уравнению для скорости, а другие характеристики плазмы определяются из уравнений, сходных с одномерным уравнением непрерывности.

Рассмотрим бессиловое уравнение движения и уравнение непрерывности

$$Lu = 0, \quad Ly = -y\,\partial u / \partial x, \quad L = \partial / \partial t + u\,\partial / \partial x, \tag{1}$$

где t, x — безразмерные время и координата, $u(t, x, x_i)$, $y(t, x, x_i)$ — безразмерные скорость и плотность плазмы, зависящие от других координат x_i, как от параметров, L — субстанциональная производная.

1. Граничная задача: заданы $u(t, x_0) = u_0(t)$, $y(t, x_0) = y_0(t)$. Первое уравнение (1) дает

$$u(t, x) = u_0(t_0), \quad t_0 = t - (x - x_0) / u, \tag{2}$$

где t_0 — момент испускания из точки x_0 частицы, пришедшей в точку x в момент t.

Введем функцию $K(t_0, x)$ с очевидными свойствами:

$$K(t_0, x) = \frac{u^2}{u^2 - (\partial u_0/\partial t_0)(x - x_0)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial t_0}K,$$
$$Lf(u)K^m = m(\partial u_0 / \partial t_0) f(u) K^{m+1} / u, \tag{3}$$

где m — целое число, а $f(u)$ — произвольная функция скорости.

Используя (3) для случая $m = 1$ и граничные условия, получим решение второго уравнения (1) в виде

$$y(t, x) = y_0(t_0) K(t_0, x). \tag{4}$$

Если $u_0(t_0)$ имеет максимум, т. е. представляет собой волну, то профиль волны $u(x, t)$ с ростом x будет нелинейно искажаться (с сохранением амплитуды), а плотность $y(t, x)$ расти на гребне волны. При некотором значении $x_m(t_m)$ частицы вдоль линии тока $t_0(t, x) = \text{const}$, догонят друг друга. Точка $x_m(t_0)$ — начало опрокидывания волны. Плотность y при этом обращается в бесконечность. $K^{-1} = 0$. Из возможных значений x_m, при которых $K^{-1}=0$, надо выбрать наименьшее. Это дает

$$x_m - x_0 = [u^2 / (\partial u / \partial t_0)]_{t_0=t_{0m}}, \qquad (5)$$

где t_{0m} — точка минимума $x_m(t_0)$, т. е. корень уравнения

$$d[u^2 / (\partial u / \partial t_0)] / dt_0 = 0.$$

Очевидно, что $x < x_m$ (или $t < t_m$) определяет область справедливости предложения о свободном разлете.

2. Задача с начальными условиями: задано $u(t_0, x) = u_0(x)$, $y(t_0, x) = y_0(x)$. Решение запишется в следующем виде, аналогичном (2), (4):

$$u(t, x) = u_0(x_0), \quad y(t, x) = y_0(x_0) K_1(t, x_0); \quad x_0 = x - u(t - t_0),$$

где вместо (3), (5) выполняются равенства

$$K_1(t, x_0) = [1 + (\partial u_0/\partial x_0)(t - t_0)]^{-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -u\frac{\partial u_0}{\partial x_0}K_1,$$
$$Lf(u)K_1^m = m\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_0}\right) f(u) K_1^{m+1}, \quad t_m - t_0 = -[1/(\partial u/\partial x_0)]_{x_0=x_{0m}}, \qquad (6)$$

x_{0m} — точка минимума $t_m(x_0)$, а $t < t_m$ — область справедливости свободного разлета.

Рассмотрим конкретный пример граничной задачи: $u(t, x) = u_0(t) = 1 + \alpha - \alpha \cos nt$. Решение запишется в виде

$$u(t, x) = u_0(t_0) = 1 + \alpha - \alpha \cos nt_0, \quad t_0 = t - (x - x_0) / u. \qquad (7)$$

Условие (5) дает

$$x_m - x_0 = (1 - \alpha \cos nt_{0m})^2 / (\alpha n \sin nt_{0m});$$
$$\cos nt_{0m} = [\sqrt{(1+\alpha)^2 + 8\alpha^2} - (1+\alpha)] / (2\alpha). \qquad (8)$$

При $\alpha \gg 1$ (большая глубина модуляции) $x_m - x_0 \approx 0$, $nt_{0m} \approx 0$, т. е. опрокидывание волны начинается в точке минимума $u_0(t_0)$, и область применимости сужается до нуля. При $\alpha \ll 1$

$$x_m - x_0 \approx 1 / n\alpha, \quad nt_{0m} \approx \pi / 2. \qquad (9)$$

Точка nt_{0m} смещается к предельному значению $\pi/2$, при котором максимальна производная $\partial u_0 / \partial t_0$, а область применимости расширяется до $1/(n\alpha)$.

Если $u(t_0, x) = u_0(x) = 1 - \alpha + \alpha \cos kx$, то решение (5) задачи с начальными условиями имеет вид

$$u(t, x) = u_0(x_0) = 1 - \alpha + \alpha \cos kx_0.$$

Из (6) для t_m получаем $t_m - t_0 = 1/(\alpha k)$ в точке $kx_{0m} = 3\pi/2$, т. е. опрокидывание начинается на максимальном спаде $u_0(x_0)$. Выражение для t_m эквивалентно (9), но в отличие от последнего оно справедливо при любых значениях α (при любой глубине модуляции). Это отличие легко понять, если учесть, что в задаче 2 частицы стартуют с расстояний, не зависящих от их скорости, а в задаче 1 частице, покинувшей границу $x = x_0$ на время δt позже заданной частицы, придется ее догонять с начального расстояния $v\,\delta t$, на которое ушла первая частица.

В отношении солнечного ветра более реальна постановка задачи 1, так как измерения в настоящее время производятся на фиксированных расстояниях x от Солнца. Вернемся к конкретному примеру в задаче 1. Решение (7) определяется трансцендентным уравнением для $u(t, x)$. Оно решается в явном виде для обратной функции $t(u, x)$. Подставляя это решение в (3), найдем функцию K, определяющую по (4) плотность y. Для удобства сопоставления профилей u, y на разных расстояниях x или в различные моменты времени t перейдем в систему координат, движущуюся вдоль линии тока $t_0 = t - (x - x_0)/u$ с минимальной скоростью $u = 1$. При этом можно изменить начало отсчета либо x, либо t. Положим $\bar{t} = t + (x - x_0)$. Учитывая (2), получим

$$u(\bar{t}) = u(t), \quad \bar{t} = t - (x - x_0)(u - 1)/u, \tag{10}$$

и аналогичную формулу для K и y.

Для рассматриваемого примера будем иметь

$$\Phi = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{pmatrix} \pm \arcsin \frac{u - 1 - \alpha}{\alpha} - X\frac{u-1}{\alpha u}; \quad \frac{\partial u_0}{\partial t_0} = \sin\left(\Phi + X\frac{u-1}{\alpha u}\right), \tag{11}$$

где $X = (x - x_0)\alpha n \approx (x - x_0)/x_m$, $\Phi = n\bar{t}$. Верхняя ветвь $\Phi(u)$ для области $0 \leqslant \Phi \leqslant \Phi_1$, нижняя – для $\Phi_1 \leqslant \Phi \leqslant 2\pi$, $\Phi_1 = \pi - 2X/(1 + \alpha)$. Величина X меняется в пределах от 0 до 1 $(x \approx x_m)$ и u – в пределах от 1 до $1 + 2\alpha$.

Подставив (11) в (3), найдем K. Графики $u(\Phi)$, $K(\Phi)$ приводятся на рис. 1. Видно, что вблизи критической точки $(X = 1)$ плотность стремится к бесконечности. Интересно отметить, что опрокидывание профиля $u(\Phi)$ (многозначность функции u) происходит не сразу за критической точкой $X = 1$, а, как показывает анализ, лишь при $X \sim \pi/2$; в области же $1 < X < \pi/2$ продолжается рост крутизны и смещение максимума $u(\Phi)$ к точке $\Phi = 0$.

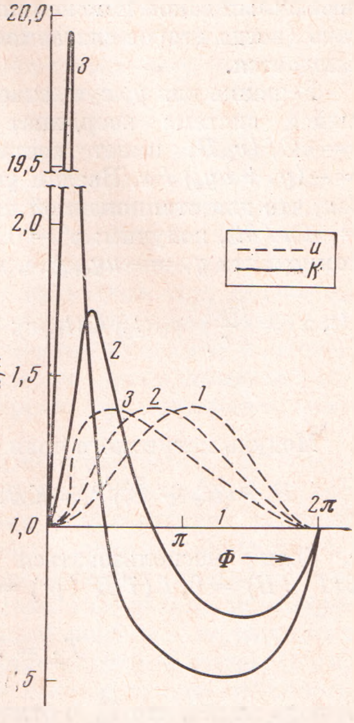

Рис. 1. Значения $u(\Phi)$ и $K(\Phi)$ при $\alpha = 0{,}2$ и различных X: *1* — $X = 0$; *2* — 0,5; *3* — 1,0

В применении к солнечному ветру t измеряется в $1/\Omega$, Ω – угловая частота вращения Солнца, $u = v/v_{00}$ (v_{00} – минимальная скорость на границе $r = r_0$ – несколько радиусов Солнца), $x = r\Omega/v_{00}$, $y = \rho r_0^2/\rho_0 r^2$. Величина n в формуле (11) связана с длительностью $t = 2\pi/n$ простейшего по форме возмущения (7). Целочисленные значения n соответствуют стационарной картине во вращающейся системе координат. При фиксированном значении φ (например, $\varphi = 0$) время $t = \varphi - \varphi'$ совпадает с азимутальным углом $\psi = -\varphi'$ во вращающейся системе. Второе уравнение (7) совпадает со спиралью Архимеда.

Стационарная секторная структура, наблюдавшаяся [3] в спокойный период (1965 г.), соответствует $n = 4$; $\alpha = 0{,}2$; $v_{00} = 300$ км/сек, что дает $r_m = 0{,}83$ а.е. В возмущенный период были выявлены всплески [4] со средним значением $n = 3{,}9$; $v_{00} = 340$ км/сек; $\alpha = 0{,}2$, что дает $r_m = 1{,}0$ а.е. В обоих случаях профили скорости и плотности имеют вид, подобный графикам рис. 1, *3* $(r = r_m)$. Очевидно, что в области $r \geqslant r_m$ надо учитывать тепловое и магнитное давление, которое отодвигает область образования косых ударных волн на бо́льшие по сравнению с r_m расстояния. Если показатель политропы $\gamma = 3$ (идеальный газ с одной степенью свободы), то удается получить точное решение уравнений (1) с учетом давления [5]. Оказывается, в этом случае рост плотности ограничен величиной $y = y_0(1 + \alpha v_{00}/c_0)$, где c_0 – скорость звука на уровне $r = r_0$, и опрокидывания профиля волны $u(\Phi)$ не происходит.

Уравнения для магнитного поля

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

в системе уравнений одножидкостной магнитной гидродинамики в сферической системе координат для безразмерных переменных сводятся к типу второго уравнения в (1). Обозначим $y_\varphi = xB_r / B_0$, $y_\theta = xB_\theta \sin\theta / B_0$, $y_r = x^2 B_r \sin\theta / B_0$, $x = \Omega r / v_{00}$, $u = v / v_{00}$. Тогда уравнения для y_φ, y_θ, так же как и для плотности $y_\rho = x^2\rho / \rho_0$, будут в точности совпадать с уравнением (1), решение которого дается формулой 4, а уравнение для y_r компоненты с учетом условия $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ может быть сведено к виду

$$L\{y_r - (\partial u_0 / \partial\varphi) u y_\varphi / (\partial u_0 / \partial t_0) - (\partial u_0 / \partial\theta) u y_\theta / (\partial u_0 / \partial t_0)\} = 0. \quad (12)$$

Используя свойства оператора L и выражение (4), отсюда можно получить решение для компоненты y_r:

$$y_r = y_{r0} + \frac{x - x_0}{u}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\varphi} y_{\varphi 0} + \frac{\partial u_0}{\partial\theta} y_{\theta 0}\right) K, \quad (13)$$

из которого видно, что в области максимума K компонента y_r может иметь необычный закон изменения с расстоянием r и временами полностью исчезать (когда второе слагаемое в (13) компенсирует первое), что иногда наблюдается.

Решение для y_r существенно упрощается для стационарной во вращающейся системе координат картины. Учтем, что электрическое поле $\mathbf{e} = c\mathbf{E} / (v_{00} B)$ имеет составляющие $e_\varphi' = u y_\theta / (x \sin\theta)$, $e_r' = y_\theta$, $e_\theta' = -(y_r + u y_\varphi) / x$. Введем условие вращения шара: $\mathbf{e}_0' = 0$. Тогда, учитывая, что для стационарной картины во вращающейся системе $\partial u_0 / \partial\varphi = -\partial u / \partial t_0$, получим: $\mathbf{e}' = 0$ во всем пространстве. Это дает $y_\theta = y_{\theta 0} = 0$, а компонента $y_r = -u y_\varphi$, т. е. меняется как y_ρ, y_φ. В обычных переменных

$$\rho(t, x) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \rho_0(t_0) K(t_0, r); \quad B_\varphi = \left(\frac{r_0}{r}\right) B_{0\varphi} K; \quad B_r = -B_{\varphi 0} \frac{v_0}{\Omega r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 K = B_{r0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 K. \quad (14)$$

Модуль магнитного поля в рассматриваемом случае

$$B = (B_\varphi^2 + B_r^2)^{1/2} = K\tilde{B}, \quad \tilde{B} = B_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{1}{A}, \quad A = \left\{\frac{1 + (\Omega r_0 / v)^2}{1 + (\Omega r / v)^2}\right\}^{1/2}. \quad (15)$$

Если воспользоваться уравнениями для анизотропной плазмы $L(T_\perp / B) = 0$, $L(T_\parallel B^2 / \rho^2) = 0$, то получим

$$T_\perp = T_{\perp 0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \frac{K}{A}, \quad T_\parallel = T_{\parallel 0} A^2. \quad (16)$$

Отсюда видно, что $T_\perp$ в отличие от $T_\parallel$ ведет себя как ρ и B. Подобная тенденция обнаруживается в эксперименте ([4]).

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Шабанский, А. Р. Шистер, Всесоюзная конференция по физике космических лучей, Тбилиси, октябрь 1971 г. [2] T. Matsuda, T. Sakurai, Cosmic Electrodin., 3, 97 (1972). [3] J. M. Wilcox, N. F. Ness, J. Geophys. Res., 70, 5793 (1965). [4] J. T. Gosling, A. J. Hundhausen, et al., J. Geophys. Res., 77, 544 (1972). [5] В. П. Шабанский, А. Р. Шистер, Геомагнетизм и аэрономия, № 4 (1973).