Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 3

УДК 518:517.944/.947 МАТЕМАТИКА

А. В. ГУЛИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 7 IX 1972)

1. В работах ([1–4]) исследовалась устойчивость трехслойных разностных схем с операторами, действующими в гильбертовом пространстве H. Трехслойная разностная схема определялась как уравнение

$$B_2y^{n+2}+B_1y^{n+1}+B_0y^n=0, \quad n=0,1,\ldots, \quad y^0,\ y^1 \quad \text{заданы}, \tag{1}$$

где $y^n=y(t_n)\in H$ — функция $t_n=n\tau$ со значениями в H, B_2, B_1, B_0 — операторы, действующие в H. Вводя обозначения

$$y=y^{n+1},\quad y_t=(y^{n+2}-y^{n+1})/\tau,\quad y_{\bar t}=(y^{n+1}-y^n)/\tau,$$
$$y_{\overset{\circ}{t}}=0{,}5(y_t+y_{\bar t}),\quad y_{\bar t t}=(y_t-y_{\bar t})/\tau,$$

можно записать (1) в канонической форме (см. ([1]))

$$By_{\overset{\circ}{t}}+\tau^2Ry_{\bar t t}+Ay=0,\quad y^0,y^1 \quad \text{заданы}, \tag{2}$$

где $B=\tau(B_2-B_0)$, $R=0{,}5(B_2+B_0)$, $A=B_2+B_1+B_0$.

В ([1]) было показано, что схема (2) устойчива при условии

$$A^*=A>0,\quad R^*=R>{}^1/_4A,\quad \operatorname{Re}B=0{,}5(B+B^*)\geqslant 0 \tag{3}$$

(неравенство $A\geqslant 0$ означает, что $(Ay,\ y)\geqslant 0$ для всех $y\in H$).

В настоящей работе рассматривается разностная схема

$$y_{\overset{\circ}{t}}+\tau^2Ry_{\bar t t}+Ay=0,\quad y^0,y^1 \quad \text{заданы}, \tag{4}$$

с несамосопряженными операторами A и R. Всюду предполагается, что H — конечномерное гильбертово пространство (действительное или комплексное), операторы B_2, B_1, B_0 не зависят от n, оператор B_2^{-1} существует.

2. Теорема 1. *Пусть $A^*=-A$, $R^*=-R$, $AR=RA$. Тогда для решения задачи* (4) *справедливо тождество*

$$\mathscr{E}_{n+1}=\mathscr{E}_n,\quad n=0,1,\ldots, \tag{5}$$

где

$$\mathscr{E}_n=\mathscr{E}[y^n,\ y^{n+1}]=\|(E+2\tau R)y^{n+1}\|^2+$$
$$+2\tau\operatorname{Re}((E+2\tau R)y^{n+1},\ (A-2R)y^n)+\|(E+2\tau R)y^n\|^2. \tag{6}$$

Если при всех $y\in H$ выполнено неравенство

$$\|y\|^2+4\tau^2\|Ry\|^2\geqslant\tau^2\|(A-2R)y\|^2, \tag{7}$$

то квадратичная форма (6) *неотрицательна и, следовательно, схема* (4) *устойчива по начальным данным.*

Доказательство. Запишем (4) в виде

$$B_2y^{n+2}+0{,}5B_1y^{n+1}=-(0{,}5B_1y^{n+1}+B_0y^n), \tag{8}$$

где $B_2=E/(2\tau)+R$, $B_1=A-2R$, $B_0=-E/(2\tau)+R$ (E — единичный оператор) и возведем (8) скалярно в квадрат:

$$\|B_2y^{n+2}\|^2+\mathrm{Re}(B_2y^{n+2},\ B_1y^{n+1})=\mathrm{Re}(B_0y^n,\ B_1y^{n+1})+\|B_0y^n\|^2. \qquad (9)$$

Из условий теоремы следует, что $B_0{}^*B_0=B_2{}^*B_2$, $B_2{}^*B_1=B_1{}^*B_0$. Поэтому, прибавляя к обеим частям тождества (9) выражение $\|B_2y^{n+1}\|^2$, можно записать его в виде (5). Наконец, записывая $\mathscr{E}_n$ в виде $\mathscr{E}_n=\|(E+2\tau R)y^{n+1}+\tau(A-2R)y^n\|^2+\|(E+2\tau R)y^n\|^2-\tau^2\|(A-2R)y^n\|^2$, получаем, что $\mathscr{E}_n$ неотрицательна при условии (7).

Следствие. *Разностная схема*

$$y_{\overset{\circ}{t}}+Ay=0 \qquad (10)$$

с кососимметричным оператором A устойчива при условии $\tau\|A\|\leqslant 1$.

3. Теорема 2. *Пусть в схеме* (4) *оператор A самосопряженный, $R=R_0+R_1$, $R_0=0{,}5(R+R^*)$, $R_1=0{,}5(R-R^*)$, причем*

$$R_1R_0=R_0R_1,\qquad R_1A=AR_1. \qquad (11)$$

Тогда для задачи (4) *выполняется неравенство*

$$\mathscr{E}_{n+1}\leqslant\mathscr{E}_n,\qquad n=0,\ 1,\ldots, \qquad (12)$$

где

$$\mathscr{E}_n=\mathscr{E}[y^n,\ y^{n+1}]={}^1/_4(A(y^{n+1}+y^n),\ y^{n+1}+y^n)+$$
$$+((R_0-{}^1/_4A)(y^{n+1}-y^n),\ y^{n+1}-y^n)-2\tau\mathrm{Re}(AR_1y^n,\ y^{n+1}). \qquad (13)$$

Если при всех $y\in H$ выполнены неравенства

$$(Ay,\ y)\geqslant 0,\qquad ((R_0-{}^1/_4A)y,\ y)\geqslant\tau^2(AR_1y,\ R_1y), \qquad (14)$$

то квадратичная форма (13) *неотрицательна и, следовательно, схема* (4) *устойчива по начальным данным.*

Доказательство. Умножим (4) скалярно на $y_{\overset{\circ}{t}}$ и возьмем действительную часть полученного тождества

$$\|y_{\overset{\circ}{t}}\|^2+\tau^2\,\mathrm{Re}(R_0y_{\bar{t}t},y_{\overset{\circ}{t}})+\mathrm{Re}(Ay,y_{\overset{\circ}{t}})=-\tau^2\,\mathrm{Re}(R_1y_{\bar{t}t},y_{\overset{\circ}{t}}). \qquad (15$$

Левую часть (15) преобразуем так же, как и в ([1]):

$$\tau^2\,\mathrm{Re}(R_0y_{\bar{t}t},y_{\overset{\circ}{t}})+\mathrm{Re}(Ay,y_{\overset{\circ}{t}})=0{,}5\overset{\circ}{\mathscr{E}}_t, \qquad (16)$$

где

$$\overset{\circ}{\mathscr{E}}_n={}^1/_4(A(y^n+y^{n+1}),\ y^n+y^{n+1})+((R_0-{}^1/_4A)(y^{n+1}-y^n),\ y^{n+1}-y^n).$$

Далее применим к (4) оператор $R_1{}^*=-R_1$, умножим полученное уравнение скалярно на $\tau^2y_{\bar{t}t}$ и возьмем действительную часть полученного тождества

$$-\tau^2\,\mathrm{Re}(R_1y_{\overset{\circ}{t}},y_{\bar{t}t})-\tau^4\,\mathrm{Re}(R_1Ry_{\bar{t}t},y_{\bar{t}t})-\tau^2\,\mathrm{Re}(R_1Ay,y_{\bar{t}t})=0. \qquad (17)$$

Из условий (11) следует, что $(R_1A)^*=-R_1A$, $(R_1R_0)^*=-R_1R_0$. Поэтому справедливы тождества

$$-\tau^2\,\mathrm{Re}(R_1Ay,y_{\bar{t}t})=-\tau(\mathrm{Re}(R_1Ay^n,y^{n+1}))_t,$$
$$-\tau^4\,\mathrm{Re}(R_1Ry_{\bar{t}t},y_{\bar{t}t})=\tau^4\|R_1y_{\bar{t}t}\|^2. \qquad (18)$$

Складывая (15) и (17), получим, учитывая (16) и (18), тождество

$$\|y_{\overset{\circ}{t}}+\tau^2R_1y_{\bar{t}t}\|^2+0{,}5(\overset{\circ}{\mathscr{E}}-2\tau\,\mathrm{Re}(R_1Ay^n,y^{n+1}))_t=0,$$

из которого следует (12). Введем переменные $v = 0{,}5(y^n + y^{n+1})$, $w = y^{n+1} - y^n$ и запишем (13) в виде

$$\mathscr{E}_n = (Av, v) + 2\tau \operatorname{Re}(AR_1 w, v) + ((R_0 - {}^1\!/_4 A) w, w).$$

Учитывая тождество $(A(v + \tau R_1 w), v + \tau R_1 w) = (Av, v) + 2\tau \operatorname{Re}(AR_1 w, v) + \tau^2 (AR_1 w, R_1 w)$, преобразуем $\mathscr{E}_n$ к виду

$$\mathscr{E}_n = (A(v + \tau R_1 w), v + \tau R_1 w) + ((R_0 - {}^1\!/_4 A - R_1^* A R_1) w, w),$$

откуда и следует, что $\mathscr{E}_n$ неотрицательна при условиях (14).

4. Докажем абсолютную неустойчивость некоторых схем. Предварительно запишем (1) в виде эквивалентной двухслойной схемы. Введем пространство $H^2 = H \oplus H$, состоящее из векторов $y = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$, $y^{(1)}, y^{(2)} \in H$. В H^2 определено покоординатно сложение и умножение на число и задано скалярное произведение $(y, v) = (y^{(1)}, v^{(1)}) + (y^{(2)}, v^{(2)})$. Вводя векторы $y_n = \{y^n, y^{n+1}\}$ и оператор

$$S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -B_2^{-1} B_0 & -B_2^{-1} B_1 \end{pmatrix},$$

запишем (1) в виде двухслойной схемы

$$y_{n+1} = S y_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = \{y^0, y^1\}. \tag{19}$$

Назовем схему (19) *устойчивой*, если существует самосопряженный положительный оператор D: $H^2 \to H^2$ такой, что при любых $y_n \in H^2$ для решения y_{n+1} задачи (19) выполнено неравенство

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leqslant (Dy_n, y_n), \quad n = 0, \quad 1, \ldots \tag{20}$$

Будем говорить, что схема (19) *абсолютно неустойчива*, если (20) не выполняется ни для одного самосопряженного положительного оператора D: $H^2 \to H^2$.

Очевидно, что (20) эквивалентно операторному неравенству

$$D \geqslant S^* D S. \tag{21}$$

Теорема 3. *Пусть существует самосопряженный положительный оператор D такой, что выполнено* (21). *Тогда все собственные значения оператора S не превосходят по модулю единицы.*

Доказательство. Умножая (21) с обеих сторон на $D^{-1/2}$, получим эквивалентное неравенство

$$E \geqslant (D^{-1/2} S^* D^{1/2})(D^{1/2} S D^{-1/2}),$$

которое означает, что $\|D^{1/2} S D^{-1/2}\| \leqslant 1$. Следовательно, все собственные значения оператора $D^{1/2} S D^{-1/2}$ не превосходят по модулю единицы. Утверждение теоремы следует из подобия операторов S и $D^{1/2} S D^{-1/2}$.

Пример 1. Покажем, что если схема (10) устойчива, то все собственные значения оператора A лежат на мнимой оси. Для схемы (10)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & -2\tau A \end{pmatrix}.$$

Пусть λ — какое-либо собственное значение оператора S и $x = \{x^{(1)}, x^{(2)}\}$ — соответствующий собственный вектор. Из уравнения $Sx = \lambda x$ следует, что $x^{(2)} = \lambda x^{(1)}$ и $Ax^{(1)} = \frac{1 - \lambda^2}{2\tau\lambda} x^{(1)}$, т. е. $a = (1 - \lambda^2) / (2\tau\lambda)$ является собственным значением оператора A. Таким образом, собственные значения операторов S и A связаны уравнением

$$\lambda^2 + 2\tau a\lambda - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня, λ_1 и λ_2, причем

$$\lambda_1\lambda_2 = -1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -2\tau a. \tag{22}$$

Предположим, что схема (10) устойчива в какой-либо норме. Тогда, согласно теореме 3, $|\lambda_1| \leqslant 1$, $|\lambda_2| \leqslant 1$. Из (22) видно, что это возможно лишь в случае $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, т. е. при $\lambda_1 = e^{i\varphi_1}$, $\lambda_2 = e^{i\varphi_2}$. Из условия $\lambda_1\lambda_2 = -1$ получаем $\lambda_1 = e^{i\varphi}$, $\lambda_2 = -e^{-i\varphi}$. Следовательно, $\lambda_1 + \lambda_2 = 2i\sin\varphi = -2\tau a$, т. е. a — либо чисто мнимое число, либо нуль. В частности, схема (10) с самосопряженным (отличным от нуля) оператором A абсолютно неустойчива.

Пример 2. Аналогично доказывается, что если схема

$$y_{\bar{t}t} + Ay = 0 \tag{23}$$

устойчива в какой-либо норме, то все собственные значения оператора A лежат на действительной оси. В частности, схема (23) с кососимметричным (отличным от нуля) оператором A абсолютно неустойчива.

В заключение выражаю глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. А. Самарскому за постановку задачи и внимание к работе.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Самарский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 7, № 5, 1093 (1967). [2] А. В. Гулин, там же, 8, № 4, 899 (1968). [3] А. В. Гулин, А. А. Самарский, ДАН, 181, № 5, 1042 (1968). [4] А. В. Гулин, ДАН, 195, № 2, 270 (1970).