Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 3

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

А. М. ФАЛЬ

О ПРОСТЕЙШЕМ МАРКОВСКОМ СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДАНИИ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 3 XI 1972)

1. В работе ([1]) доказано, что время возвращения в начало координат для марковского случайного блуждания на положительной полуоси, переходные вероятности которого имеют вид

$$p_{r,\,r+1}=p_r={}^1/_2(1-c/r),\quad p_{r,\,r-1}=q_r={}^1/_2(1+c/r),\quad r\geqslant 1,$$
$$-{}^1/_2<c\leqslant {}^1/_2,\quad p_{01}=1,$$

принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $c+{}^1/_2$. Этот результат обобщается на случай, когда переходными вероятностями являются

$$p_r={}^1/_2(1-c_r/r),\quad q_r={}^1/_2(1+c_r/r),\quad r\geqslant 1,\quad p_0=1, \tag{1}$$

и c_r таковы, что блуждание возвратно. (Условием возвратности является расходимость ряда $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\dfrac{q_1q_2\cdots q_r}{p_1p_2\cdots p_r}$.) А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть имеется возвратное марковское случайное блуждание вида* (1).

Если выполняются условия

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c-c_n|}{n^{1-2c}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k-c_k}{k+c_k}<\infty \tag{2}$$

для некоторого $-{}^1/_2<c\leqslant{}^1/_2$ *и*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(k-c_k)(k+c)}{(k+c_k)(k-c)} \tag{3}$$

сходится, то время возвращения в начало координат в указанном блуждании принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем $c+{}^1/_2$.

Из теоремы вытекает такое

Следствие. *Если* $p_r={}^1/_2(1-c/r+O(1/r^{1+\delta}))$ *для некоторого* $\delta>0$,

$$q_r=1-p_r,\quad r\geqslant 1,\quad -{}^1/_2<c\leqslant{}^1/_2,\quad p_0=1,$$

то время возвращения в начало координат притягивается к устойчивому закону с показателем $c+{}^1/_2$.

Сформулированную теорему, так же как и ее следствие, можно использовать при доказательстве предельных теорем для аддитивных функционалов от случайных блужданий указанного выше типа.

Доказательство теоремы основано на полученном в работе ([1]) представлении производящей функции распределения времени возвращения в виде непрерывной дроби. Если обозначить через $\tau(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}p\{\tau=n\}s^n$

такую производящую функцию для случайного блуждания с произвольными p_r, q_r и отражением в нуле, то

$$\tau(z) = \cfrac{q_1 z}{1 - \cfrac{p_1 q_2 z}{1 - \cfrac{p_2 q_3 z}{1 - \dots}}}, \tag{4}$$

где $z = s^2$.

Далее вводится последовательность производящих функций $\tau^{(n)}(z)$, $n \geqslant 1$, соответствующих блужданиям, у которых

$$p_r^{(n)} = \begin{cases} {}^1/_2(1 - c_r/r), & 1 \leqslant r < n, \\ {}^1/_2(1 - c/r), & r \geqslant n. \end{cases}$$

Показывается, что при каждом $n \geqslant 1$

$$\tau^{(n)}(z) \sim 1 - L_{n,c}(1-z)^{c+{}^1/_2}, \quad z \to 1,$$

$L_{n,c}$ — некоторая константа.

Условие (2) обеспечивает равномерную сходимость $\tau^{(n)}(z)$ к предельной функции $\tau^{\infty}(z)$, которая является производящей функцией исследуемого нами случайного блуждания, причем

$$\tau^{\infty}(z) \sim 1 - (1-z)^{c+{}^1/_2} L_1\left(\frac{1}{1-z}\right), \quad z \to 1,$$

где $L_1\left(\frac{1}{1-z}\right)$ — медленно меняющаяся функция, не стремящаяся к пулю в силу условия (3).

2. Рассмотрим простейшее марковское случайное блуждапие на полупрямой с отражением в нуле с произвольными $0 < p_r < 1$. Возьмем некоторое целое число $m > 0$ и будем фиксировать прохождение частицы через точки вида km, $k = 0, 1, 2, \dots$ Известно ([3]), что если частица находится в точке km, $k > 0$, то существует ненулевая вероятность $f_{km,(k+1)m}$ перехода из km в $(k+1)m$ до попадания в $(k-1)m$. Аналогично существует вероятность $f_{km,(k-1)m}$ перехода из km в $(k-1)m$ до попадания в $(k+1)m$, причем

$$f_{km,(k-1)m} + f_{km,(k+1)m} = 1.$$

Для $k = 0$ соответствующими вероятностями будут $f_{0,m}$, $f_{0,0}$.

Таким образом, исходное блуждание индуцирует некоторое обобщенное блуждание по точкам, кратным m. А исходное блуждание можно представить как полумарковский процесс, вложенной цепью которого являются переходные вероятности обобщенного блуждания $f_{km,(k-1)m}$ и $f_{km,(k+1)m}$. Временами сидения γ_k в состоянии k являются времена достижения хотя бы одного из концов интервала $((k-1)m, (k+1)m)$.

Для исследования марковских случайных блужданий полезна следующая теорема для полумарковских процессов.

Теорема 2. *Пусть имеется полумарковский процесс со счетным множеством состояний.* $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ — *последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин, распределение которых совпадает с временем возвращения в начальное положение для полумарковского процесса,* ν — *время возвращения начального положения для вложенной цепи,* γ_j — *время сидения полумарковского процесса в состоянии* j.

Тогда, если:

1) ν *принадлежит области притяжения устойчивого закона* ψ *с показателем* α, $0 < \alpha < 1$;

2) *существуют* $M\gamma_k = a_k$; $a_k \to a$, $k \to \infty$;

3) *существуют* $D\gamma_k$; $\limsup\limits_{n\to\infty\ k\geqslant n} D\gamma_k \leqslant c < \infty$, *то*

$$\frac{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n}{(bn)^{1/\alpha}} \xrightarrow{\text{сл}} \psi,$$

где b — *некоторая нормировочная константа.*

Рассмотрим случайное блуждание, у которого

$$p_k = \frac{1}{2}\left(1-\frac{c+(-1)^k d}{k}\right), \quad |c|<\frac{1}{2}.$$

С помощью формул, приведенных в [3], стр. 113, можно убедиться, что для обобщенного случайного блуждания по точкам, кратным 2,

$$f_{2k,\,2(k+1)} = {}^1/_2(1-c/k+O(1/k^2)),$$

$$M\gamma_k \to 4, \quad k\to\infty.$$

Пользуясь понятием фундаментальной матрицы [2] и соответствующими формулами, приведенными там же, устанавливаем, что

$$\limsup_{n\to\infty\ k\geqslant n} D\gamma_k \leqslant 4.$$

Таким образом, условия теоремы 2 выполняются и следствие к теореме 1 позволяет заключить, что время возвращения в указанном случайном блуждании притягивается к устойчивому закону с показателем $c+{}^1/_2$.

Построенный пример показывает, что условие 2, которое в данном случае не выполняется, не является необходимым.

Автор приносит благодарность А. В. Скороходу за руководство и Р. З. Хасьминскому за ценные замечания.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
23 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Фаль, Укр. матем. журн., 23, № 6 (1971). [2] Дж. Кемени, Дж. Снелл, Конечные цепи Маркова, М., 1970. [3] Чжун Кай-лай, Однородные цепи Маркова, М., 1964.