Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 3

УДК 517.54+513.88 *МАТЕМАТИКА*

В. М. ФАЙВЫШЕВСКИЙ

О СТРОЕНИИ ИДЕАЛОВ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 9 XI 1972)

1. В последние годы наблюдается значительный прогресс в изучении строения идеалов различных алгебр аналитических функций *. В частности, Б. И. Коренблюмом в ([4]) дано полное описание замкнутых идеалов банаховых алгебр A^n, $n = 1, 2, \ldots$, функций, аналитических в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ и таких, что $f^{(n)}(z)$ непрерывно продолжима на $\bar{\Delta}$. Доказательства основных результатов в ([2-4, 8]) опираются на некоторые аппроксимационные теоремы, полученные при помощи весьма тонких рассуждений.

Настоящая работа возникла из желания установить для алгебр аналитических функций аналог известной теоремы Г. Е. Шилова об идеалах регулярных банаховых алгебр, удовлетворяющих условию Диткина ([9]). Заметим, что наш метод не связан с доказательством аппроксимационных теорем, аналогичных теоремам в ([2-4, 8]).

2. Обозначим через C^m, $m = 0, 1, \ldots$, совокупность комплекснозначных функций на $\Gamma = \mathrm{Fr}\Delta$, обладающих непрерывной m-й производной, $C^0 = C$. Пусть R — банахова алгебра функций на Γ, в которой алгебраические операции над элементами определены поточечно. Пусть, далее, R удовлетворяет условиям:

I. $C \supseteq R$;

II. $R \supseteq C^m$ при некотором $m \geqslant 1$.

Гармоническое продолжение на Γ функции $u \in R$ будем обозначать u^*.

Мы будем предполагать, что алгебра R обладает также следующим свойством:

III. Функции $u_r(\zeta) \overset{\text{def}}{=} u^*(r\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$, как элементы алгебры R сходятся при $r \to 1-0$ к u по норме R.

Алгебру R_+, представляющую собой совокупность функций $f \in R$ таких, что f^* аналитична в Δ, назовем K-*алгеброй*. В дальнейшем для функций $f \in R_+$ мы опускаем звездочку в обозначении соответствующей функции f^*. Для произвольной функции $f \in A$ через $Z(f)$ обозначим множество нулей функции f в Δ, $E(f)$ — множество нулей f на Γ. Если I — собственный замкнутый идеал в R_+, то $Z_I = \bigcap_{f\in I} Z(f)$, $E_I = \bigcap_{f\in I} E(f)$

Положим

$$\Pi_z(\zeta) = z(z-\zeta)^{-1}, \quad f_z(\zeta) = \Pi_z[f(\zeta) - f(z)], \quad |z| \neq 1, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Очевидно $\Pi_z \in R_+$, если $|z| > 1$, $f_z \in R_+$ при $z \in \Delta$.

Теорема 1. *Пусть I — собственный замкнутый идеал K-алгебры R_+, φ — непрерывный линейный функционал над R_+,* $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq I$.

Тогда функция

$$\hat{\varphi}^*(z) = \begin{cases} \varphi(\Pi_z), & |z| > 1; \\ \dfrac{\varphi(f_z)}{f(z)}, & |z| < 1, \quad 0 \neq f \in I, \end{cases}$$

* См., например, ([1-4, 7, 8]).

может быть продолжена до функции, аналитической в дополнении к множеству $Z_I \cup E_I$.

Теоремы, аналогичные теореме 1, неоднократно использовались в различных работах (см., например, ([1-4], [7])). Некоторые из них ([3], [4], [7]) содержатся в теореме 1. Наше доказательство близко к приведенному в ([4]).

3. Пусть $R_+ - K$-алгебра, $A_{n+1} \subset R_+ \subseteq A_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $G = BS$ — некоторая внутренняя функция, Z — множество нулей произведения Бляшке B, σ — сингулярная мера, определяющая S*. Пусть, далее E_0, $E_1, \ldots, E_n$ — замкнутые множества на Γ, удовлетворяющие условиям

1) $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \operatorname{supp} \sigma \cup (\bar{Z} \cap \Gamma)$;

2) $E_0 \setminus E_n$ — изолированное множество.

Множество $I(G; E_0, E_1, \ldots, E_n)$ функций $f \in R_+$, $f = G_f F_f$, обладающих свойствами: а) G делит G_f; б) $E_m \subseteq \bigcap\limits_{k \leq m} E(f^{(k)})$, $m = 0, 1, \ldots, n$, является, очевидно, замкнутым идеалом в R_+ (может быть, тривиальным). Такие идеалы мы будем называть стандартными. Является ли всякий идеал стандартным — таков основной вопрос при изучении строения идеалов K-алгебр. Ниже мы рассматриваем случай, когда $A_1 \subset R_+ \subseteq A$. Заметим, однако, что для получения результата, аналогичного теореме 2, в случае $A_{n+1} \subset R_+ \subseteq A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, немногое нужно прибавить к рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы 2. Точная формулировка и доказательство соответствующей теоремы будут даны в другом месте.

K-алгебру R_+, $A_1 \subset R_+ \subseteq A$, будем называть KD-алгеброй, если для каждой функции $f \in R_+$ такой, что $f(e^{i\theta_0}) = 0$ выполнено условие

$$\lim_{R \to 1+0} \frac{z - e^{i\theta_0}}{z - Re^{i\theta_0}} f(z) = f(z), \tag{1}$$

причем предел понимается в смысле нормы в R_+. Класс KD-алгебр в некотором смысле аналогичен классу алгебр с условием Диткина для случая регулярных алгебр.

Теорема 2. *Пусть $R_+ - KD$-алгебра. Тогда каждый замкнутый идеал $I \subset R_+$ такой, что E_I не более чем счетно, стандартный.*

Иначе теорема 2 может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2′. *Пусть $R_+ - KD$-алгебра. Тогда каждый замкнутый идеал $I \subset R_+$ такой, что E_I не более чем счетно, является пересечением* примарных идеалов.

Кратко наметим доказательство теоремы 2. Пусть $f \in I(G_I, E_I)$ и φ — линейный непрерывный функционал над R_+, аннулирующийся на I. Предположим вначале, что $G_I(0) \neq 0$. Положим $\psi(g) = \varphi((f, g)$, $g \in R_+$. Если мы покажем, что $\psi \equiv 0$, то теорема при сделанном предположении будет доказана. Характер изолированных особенностей функции $\hat{\psi}$ устанавливается следующей леммой.

Лемма. *Каждая изолированная особенность функции $\hat{\psi}(z)$ является полюсом.*

Для доказательства леммы используется теорема 1, а также принцип Фрагмена — Линделефа. При этом оценка роста функции $\hat{\psi}(z)$ при $|z| \to 1 + 0$ получается из II, а оценка $\hat{\varphi}(z)$ при $|z| \to 1 - 0$ по радиусам следует из рассуждений, аналогичных имеющимся в ([2]) и ([4]).

Нетрудно видеть, что $\hat{\psi}(z) = \hat{\varphi}(z) f(z) - \varphi(f_z)$, $z \in \Delta$, откуда ясно, что особенности $\hat{\psi}(z)$ могут быть лишь на Γ. Пусть $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$ — полюс $\hat{\psi}(z)$. По теореме 1 $\zeta_0 \in E_I$. Используя (1), можно показать, что $\hat{\psi}(\rho e^{i\theta_0}) = o(\rho - 1)$, $\rho \to 1 + 0$, и, следовательно, $\hat{\psi}(z)$ аналитична в ζ_0. Так как E_I не более чем счетно, то $\hat{\psi}(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, включая

---

* По поводу понятий, связанных с факторизацией аналитических в круге функций, см., например, ([6]).

бесконечно удаленную точку. По теореме Лиувилля и вследствие сделанного предположения, получаем $\hat{\psi}(z) \equiv 0$. Случай, когда z делит G_I, легко сводится к только что рассмотренному.

Отметим, что результаты, аналогичные теоремам 1 и 2, могут быть доказаны для алгебр функций, аналитических в полуплоскости.

4. Нам неизвестно, является ли всякий идеал KD-алгебры главным. Однако из результатов ([3]) следует

Т е о р е м а 3. *Пусть R_+ — KD-алгебра. Если для идеала $I \subset R_+$ множество $E = Z_I \cup E_I$ не более чем счетно и удовлетворяет условию*

$$\int_\Gamma \log d(\zeta, E)\,|d\zeta| > -\infty,$$

где через $d(\zeta, E)$ обозначено расстояние от точки ζ до множества E, то I — главный идеал.

Многие из часто встречающихся в анализе алгебр являются KD-алгебрами. Так, легко устанавливаются следующие утверждения.

П р е д л о ж е н и е 1. *Банахова алгебра аналитических в Δ функций и таких, что их ряд Тейлора сходится в $\bar{\Delta}$ абсолютно, является KD-алгеброй.*

П р е д л о ж е н и е 2. *Банахова алгебра аналитических в Δ функций и таких, что $f' \in H^2$, является KD-алгеброй.*

Заметим, что из предложения 1 и теоремы 2 непосредственно следует результат В. П. Гурария ([1]) (точнее, его аналог для круга), из предложения 2 и теорем 2 и 3 — результат работы ([8]).

Автор выражает глубокую благодарность Б. И. Коренблюму за многочисленные полезные обсуждения.

Поступило
30 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Г у р а р и й, Функц. анализ и его прилож., 3, в. 4, 34 (1969). [2] B. A. T a y l o r, D. L. W i l l i a m s, Canad. J. Math., **22**, № 6, 1266 (1970). [3] Б. И. К о р е н б л ю м, ДАН, **202**, № 6, 1258 (1972). [4] Б. И. К о р е н б л ю м, Функц. анализ и его прилож., **6**, в. 3, 38 (1972). [5] К. Г о ф м а н, Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963. [6] Б. И. К о р е н б л ю м, ДАН, **200**, № 1, 24 (1971). [7] Г. М. Ф е л ь д м а н, Теория функций, функц. анализ и их прилож., Республиканский научный сборн., в. 11, 108 (1970). [8] Н. М. О с а д ч и й, Укр. матем. журн., **23**, № 6, 753 (1971). [9] Г. Е. Ш и л о в, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **21**, 1 (1947).