

УДК 513.88 + 517.948

МАТЕМАТИКА

А. В. ШТРАУС

О РАСШИРЕНИЯХ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком И. Н. Векун 20 XI 1972)

1. Пусть A — замкнутый симметрический несамосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H . Его область определения $\mathfrak{D}(A)$, которую будем обозначать также через $\mathfrak{D}$, не предполагается плотной в H . Оператор A называется полуограниченным снизу (сверху), если квадратичная форма (Af, f) ограничена снизу (сверху) на пересечении единичной сферы $S = \{f \in H: \|f\| = 1\}$ с $\mathfrak{D}$. Отметим, что неплотно заданный оператор, полуограниченный и снизу и сверху, может оказаться неограниченным; для плотно заданного оператора это невозможно.

Поясним некоторые обозначения. При любом комплексном λ $\mathfrak{M}_\lambda = (A - \lambda I)\mathfrak{D}$, $\mathfrak{N}_\lambda = H \ominus \overline{\mathfrak{M}_\lambda}$. Если оператор A полуограничен снизу, то через $m(A)$ или m будет обозначаться его нижняя грань, т. е. нижняя грань квадратичной формы (Af, f) на множестве $S \cap \mathfrak{D}$. Аналогично через $M(A)$ или M будет обозначаться верхняя грань оператора A , если он полуограничен сверху.

Лемма. Если оператор A полуограничен снизу (сверху), то при любом $\lambda < m$ ($\lambda > M$) $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{N}_\lambda$ линейно независимы, а их прямая сумма плотна в H .

Замечание. Для любого вещественного λ аналогичный факт имеет место без какого-либо предположения о полуограниченности оператора (¹). Таким образом, заключение леммы верно для любого λ , не принадлежащего замыканию области значений квадратичной формы (Af, f) на множестве $S \cap \mathfrak{D}$, т. е. для любого λ из внешнего поля регулярности Π оператора A .

Принимая во внимание лемму и замечание, определим при любом $\lambda \in \Pi$ расширение A_λ оператора A следующим образом:

$$\mathfrak{D}(A_\lambda) = \mathfrak{D} + \mathfrak{N}_\lambda, \quad A_\lambda(f + \varphi) = Af + \lambda\varphi, \quad f \in \mathfrak{D}, \quad \varphi \in \mathfrak{N}_\lambda \text{ (ср. } (^2)).$$

Впрочем, в дальнейшем всюду, за исключением теоремы 4, оператор A_λ рассматривается лишь для вещественных $\lambda \in \Pi$.

Теорема 1. В условиях леммы при любом $\lambda < m$ ($\lambda > M$) оператор A_λ самосопряжен и приводится подпространством $\mathfrak{M}_\lambda$, а его часть A_λ' в $\mathfrak{N}_\lambda$ полуограничена снизу (сверху) и $m(A_\lambda') \geq m$ ($M(A_\lambda') \leq M$).

Следствие. Если оператор A полуограничен снизу, то при любом $\lambda < m$ он обладает полуограниченным снизу самосопряженным расширением A_λ с нижней гранью $m(A_\lambda) = \lambda^*$.

2. В этом пункте рассмотрим случай ограниченного оператора.

Теорема 2. Если оператор A ограничен, то при любом $\lambda < m$ ($\lambda > M$) оператор A_λ тоже ограничен и является наименьшим (наибольшим) элементом во множестве всех ограниченных самосопряженных расширений $\bar{A}$ оператора A , удовлетворяющих условию: $m(\bar{A}) \geq \lambda$ ($M(\bar{A}) \leq \lambda$).

Отсюда вытекает, в частности, следующее предложение.

* Для случая плотно заданного оператора A это следствие совпадает с известной теоремой Неймана (³) (см., например, (⁴), стр. 377, 378). Отметим, что в указанном частном случае теорема 1 соприкасается с одним предложением из (⁵), [2.4].

Теорема 3. Если оператор A ограничен, то операторнозначная функция $\lambda \mapsto A_\lambda$ возрастает в каждом из промежутков $(-\infty, m)$ и $(M, +\infty)$.

При доказательстве следующей теоремы используются результаты работ (2, 6).

Теорема 4. Если оператор A ограничен, то операторнозначная функция $\lambda \mapsto A_\lambda$ аналитична во внешнем поле регулярности оператора A , т. е. во всей комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $[m, M]$ вещественной оси.

Теорема 5. Для того чтобы ограниченный оператор A обладал ограниченным самосопряженным расширением с той же нижней (верхней) гранью m (M), необходимо и достаточно, чтобы операторнозначная функция $\lambda \mapsto A_\lambda$ была ограничена сверху (снизу) в промежутке $(-\infty, m)$ ($(M, +\infty)$). В этом случае оператор $A_{m \rightarrow 0}$ ($A_{M \rightarrow 0}$) является наименьшим (наибольшим) элементом во множестве таких расширений*.

Для заданного сегмента $[l, L] \supset [m, M]$ не всегда существует такое самосопряженное расширение $\tilde{A} \supset A$, спектр которого содержится в $[l, L]$. Как легко видеть, необходимым условием существования такого расширения является выполнение неравенства

$$\left\| A - \frac{l+L}{2} I \right\| \leq \frac{L-l}{2}. \quad (1)$$

Из результатов М. Г. Крейна (7), теоремы 1–3) следует, что условие (1) также достаточно и при его выполнении во множестве всех самосопряженных операторов $\tilde{A} \supset A$ со спектром, содержащимся в $[l, L]$, имеются наименьший и наибольший элементы. В (7) дана довольно сложная конструкция этих экстремальных расширений. Следующая теорема предлагает иной метод их построения.

Теорема 6. Если оператор A удовлетворяет условию (1), то $A_{l \rightarrow 0}$ и $A_{L \rightarrow 0}$ являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами во множестве всех самосопряженных расширений оператора A , спектр которых содержится в $[l, L]$.

Заметим, что в силу теоремы 4 при $l < m$ $A_{l \rightarrow 0} = A_l$, а для $L > M$ $A_{L \rightarrow 0} = A_L$.

Отметим еще, что в случае, когда $m \geq 0$ и $l = 0$, условие (1) равносильно следующему:

$$\|Af\|^2 \leq L(Af, f) \quad \text{для любого } f \in \mathfrak{D}.$$

3. Пусть теперь A — положительный оператор, который не предполагается ограниченным. Выясним, при каких условиях A обладает положительным самосопряженным расширением, и опишем совокупность таких расширений, если они существуют**. Как показано Стоуном (8) и Фридрихсом (9), обосновавшими предположение Неймана (3), для плотно заданного положительного оператора существует положительное самосопряженное расширение. Совокупность всех этих расширений описана М. Г. Крейном (7). В настоящей работе рассматривается оператор A , область определения которого необязательно плотна в H . Впрочем предлагаемый здесь подход позволяет также несколько дополнить известные результаты, относящиеся к случаю плотно заданного оператора.

При любом отрицательном $\lambda \neq -1$ положим

$$S_\lambda = (I + A_\lambda)^{-1};$$

S_λ есть ограниченное самосопряженное расширение оператора $B = (I + A)^{-1}$, причем

$$S_\lambda = B_{1/(1+\lambda)}$$

в смысле обозначения, введенного в п. 1.

* Односторонний предел $A_{m \rightarrow 0}$ ($A_{M \rightarrow 0}$) существует в смысле сильной топологии.

** К этому вопросу сводится и более общая задача, когда оператор A полуограничен снизу, $\gamma \leq m$, и требуется описать совокупность всех полуограниченных самосопряженных операторов $\tilde{A} \supset A$, для которых $m(\tilde{A}) \geq \gamma$. Достаточно ввести в рассмотрение положительный оператор $A - \gamma I$ и его положительные самосопряженные расширения.

Учитывая, что B удовлетворяет условию $\|Bf\|^2 \leq (Bf, f)$, $f \in \mathfrak{D}(B)$, и применяя результаты п. 2 к оператору B , заключаем, что операторнозначная функция $\lambda \mapsto S_\lambda$ убывает в каждом из промежутков $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и обладает пределами $S_{-\infty} = B_{-0}$, $S_{-0} = B_{+0}$, каждый из которых является ограниченным положительным самосопряженным расширением оператора B , не превосходящим 1 по норме, причем $S_{-\infty} \leq S_{-0}$.

Теорема 7. Для того чтобы положительный оператор A обладал положительным самосопряженным расширением, необходимо и достаточно, чтобы оператор S_{-0} имел обратный. В этом случае одним из положительных самосопряженных расширений является оператор

$$A_{-0} = S_{-0}^{-1} - I, \quad (2)$$

а множество всех таких расширений состоит из всех самосопряженных операторов $\tilde{A}$, удовлетворяющих условию

$$S_{-\infty} \leq (I + \tilde{A})^{-1} \leq (I + A_{-0})^{-1} = S_{-0}. \quad (3)$$

Замечание 1. Обозначение A_{-0} здесь оправдано, так как A_{-0} есть предел операторнозначной функции $\lambda \mapsto A_\lambda$ при $\lambda \rightarrow -0$ в следующем смысле:

$$(I + A_{-0})^{-1} = \lim_{\lambda \rightarrow -0} (I + A_\lambda)^{-1}.$$

Замечание 2. Если оператор A ограничен, то возможны следующие случаи. 1) Оператор S_{-0}^{-1} существует и ограничен. Тогда в соответствии с теоремами 2 и 5 A_{-0} есть наименьшее ограниченное положительное самосопряженное расширение оператора A . 2) Оператор S_{-0}^{-1} существует и неограничен. Тогда A не имеет ограниченных положительных самосопряженных расширений, а оператор A_{-0} , определенный по формуле (2), является неограниченным положительным самосопряженным расширением оператора A , экстремальным в смысле неравенства (3). 3) S_{-0} не имеет обратного. Тогда у A нет положительных самосопряженных расширений.

Теорема 8. Ядро оператора $S_{-\infty}$ совпадает с $H \ominus \overline{\mathfrak{D}}$.

Если оператор A плотно задан, то оба оператора S_{-0} и $S_{-\infty}$ обладают обратными. Положим в этом случае

$$A_{-\infty} = S_{-\infty}^{-1} - I,$$

так что $S_{-\infty} = (I + A_{-\infty})^{-1}$ *. На основании теоремы 7 заключаем, что наряду с A_{-0} $A_{-\infty}$ является положительным самосопряженным расширением оператора A и тоже обладает экстремальным свойством, выраженным в виде неравенства (3). Из сопоставления этих фактов с результатами М. Г. Крейна ⁽⁷⁾ вытекает следующее предложение.

Теорема 9. Если A — плотно заданный положительный оператор, то $A_{-\infty}$ есть жесткое, а A_{-0} — мягкое расширение оператора A в смысле М. Г. Крейна **.

В заключение отметим, что к идее построения положительного самосопряженного расширения плотно заданного оператора A в виде предела операторнозначной функции $\lambda \mapsto A_\lambda$ при $\lambda \rightarrow -0$ естественно приводит упомянутая выше теорема Неймана. Однако существование этого предела, насколько известно автору, не было ранее установлено. В ⁽⁴⁾, стр. 378, положительное самосопряженное расширение оператора A с конечным дефектным числом строится в виде частичного предела функции $\lambda \mapsto A_\lambda$ при $\lambda \rightarrow -0$.

* Обозначение $A_{-\infty}$ обосновывается так же, как A_{-0} .

** Если $m > 0$, то $A_{-0} = A_0$; это следует, в частности, из теоремы 4, примененной к оператору $(I + A)^{-1}$. То, что в этом частном случае A_0 есть мягкое расширение оператора A , установлено М. Г. Крейном ⁽⁷⁾, теоремы 13, 14).

Для случая оператора с произвольным дефектным числом в ⁽⁵⁾ применяется более сложная процедура, по существу связанная с рассмотрением такого же частичного предела.

Ульяновский государственный педагогический
институт им. И. Н. Ульянова

Поступило
24 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1, 53 (1940). ² А. В. Штраус, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 1, 186 (1968). ³ J. von Neumann, Math. Ann., 102, 49 (1929). ⁴ Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966. ⁵ Y. Kilpi, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A, I, № 264 (1959). ⁶ А. В. Штраус, ДАН, 204, № 1, 52 (1972). ⁷ М. Г. Крейн, Матем. сборн. 20 (62), № 3, 431 (1947). ⁸ M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, N. Y., 1932. ⁹ K. Friedrichs, Math. Ann., 109, 465 (1934).