

УДК 517.543 : 517.862

МАТЕМАТИКА

С. Л. КРУШКАЛЬ

О МЕРЕ ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА КОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННОЙ КЛЕЙНОВОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 3 XI 1972)

В теории клейновых групп на плоскости одной из проблем является вопрос, какова плоская мера Лебега множества предельных точек произвольной конечно-порожденной клейновой группы. Известна гипотеза Л. Альфорса ⁽¹⁾, см. также ⁽²⁾, что эта мера всегда равна нулю. Эта гипотеза доказана для частных классов конечно-порожденных групп: для квазифуксовых групп она справедлива, поскольку они являются квазиконформными деформациями фуксовых групп (см. ^(3, 4)), и в ⁽¹⁾ она доказана для групп, которые после продолжения их отображений в полупространство (шар) имеют фундаментальный полиэдр с конечным числом граней. Но как показал Л. Гринберг ⁽⁵⁾, в полупространстве существуют конечно-порожденные клейновы группы, имеющие фундаментальный полиэдр с бесконечным числом граней. Поэтому в общем случае вопрос оставался открытым.

Цель настоящей заметки — наметить доказательство следующей теоремы, дающей отрицательное решение проблемы.

Теорема. *Существуют конечно-порожденные клейновы группы конформных автоморфизмов плоскости, предельные множества которых имеют положительную плоскую меру.*

Этот факт следует из результатов работы автора ⁽⁶⁾ на основании свойств границы пространства Тейхмюллера. Ниже используются конструкция, введенная в пп. 1, 2 работы ⁽⁶⁾, и обозначения, принятые там. В дополнение к ним обозначим круг $|z| < 1$ через U , а вместо u_n и u_0 теперь удобнее писать u_n , $\varphi \in \overline{T(G)}$, $u_n \in W_{2,0}^1$.

Будем предполагать, что фуксова группа G в ⁽⁶⁾ имеет компактную фундаментальную область.

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть точке $\varphi_0 = \{f_0, z\} \in \partial T(G)$ соответствует параболическая группа G_0 и последовательность $\varphi_n = \{f_n, z\} \in T(G)$, $f_n = f_{\mu_n}$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к φ_0 .*

Тогда для каждого замкнутого множества $F \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f_0(U)}$ найдется число $n_0 = n_0(F)$ такое, что $F \cap f_n(U) = \emptyset$ при $n > n_0$.

В силу свойств предельного множества группы G_0 множество F может лежать лишь в конечном числе инвариантных компонент G_0 . Пусть Δ — одна из них. Можно показать, что ни один круг из Δ не может принадлежать целиком бесконечной подпоследовательности областей из $\{f_n(U)\}$. Допустим теперь, что существует точка $w' \in \Delta$, принадлежащая бесконечному множеству областей $f_{n_k}(U)$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим (некомпактный) фундаментальный многоугольник P_0 группы G_0 в Δ , ограниченный дугами изометрических окружностей $I_g = \{w \in \mathbb{C} : |g_{0j}'(w)| = 1\}$ преобразований $g_{0j}(w)$, $j = 1, \dots, N$, порождающих максимальную подгруппу $G_{0\Delta} \subset G_0$, оставляющую инвариантной Δ . Точка w' может лежать либо внутри одного, либо на границе конечного числа многоугольников $g_0(P_0)$, $g_0 \in G_0$. Тогда найдутся соответствующие фундаментальные многоугольни-

ки P_k групп $G_{k'} = f_{n_k} G f_{n_k}^{-1}$, внутренности которых сходятся к $\text{Int } g_0(P_0)$ как к ядру относительно некоторой точки $w_0 \in \text{Int } g_0(P_0)$. С другой стороны, в силу предыдущего должны существовать точки $w^{(k')} \rightarrow w'$ такие, что $w^{(k')} \in \overline{f_{n_k}(U_1)}$, $k' = 1, 2, \dots$. Следовательно, многоугольники P_k должны принадлежать одновременно и областям $\overline{f_{n_k}(U_1)}$, и областям $f_{n_k}(U)$, что невозможно. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. Если граничная группа G_0 , соответствующая точке $\varphi_0 \in \partial T(G)$, такова, что ее предельное множество $\Lambda(G_0)$ имеет нулевую меру, то отображение $\tau(\varphi) = u_\varphi: B_2(U, G) \rightarrow W_{2,\sigma}^1$ непрерывно в точке φ_0 .

Пусть $\varphi_0 = \{f_0, z\}$ и $\varphi_n = \{f_n, z\}$, $n = 1, 2, \dots$, $z \in U$, — произвольная последовательность точек $T(G)$, сходящаяся к φ_0 . Рассмотрим кольцо $K_r: 1 < |z| < r$, $r < \infty$. Если G_0 — вырожденная группа, то условие $m\Lambda(G_0) = 0$ дает, что $mf_0(K_r)$ совпадает с площадью всей конечной области D_r , ограниченной кривой $f_0(|z| = r)$. Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} mf_n(K_r) = mf_0(K_r)$ и потому $\lim_{n \rightarrow \infty} mf_n(U_1) = 0$, а это в силу оценки (4) из (6) влечет за собой сходимость u_{φ_n} к u_{φ_0} в $W_{2,\sigma}^1$ и, следовательно, отображение τ непрерывно в точке φ_0 (изнутри $T(G)$) *.

Пусть G_0 — параболическая группа. Взяв $R > r$, получим, что при $n \geq n_0(R)$ все $f_n(K_r) \subset D_R$, где D_R — внутренность кривой $f_0(|z| = R)$. Так как характеристические функции $\chi_n(y)$ областей $f_n(K_r)$ удовлетворяют условию $\|\chi_n\|_{L_2(D_R)} \leq \eta(R, r) < \infty$ ($n \geq n_0$), то семейство $\{\chi_n\}$ слабо компактно в $L_2(D_R)$, и, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\chi_n(y)$ сходятся слабо в $L_2(D_R)$ к некоторой функции $\chi_0(y) \in L_2(D_R)$, т.е. для любого $\omega \in L_2(D_R)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_R} \omega(y) \chi_n(y) dy = \int_{D_R} \omega(y) \chi_0(y) dy. \quad (*)$$

Взяв гладкие функции $\omega(y) \in C_0^\infty(D_R)$ с носителями $\text{supp } \omega \subset D_R \setminus \Lambda(G_0)$, будем иметь $\omega = \omega_1 + \omega_2$, где $\text{supp } \omega_2 \subset f_0(K_r)$, $\text{supp } \omega_1 \subset D_R \setminus f_0(K_r)$. Из леммы 1 вытекает, что при $n \geq n_1(\omega_1)$ имеем $\text{supp } \omega_1 \cap f_n(K_r) = \emptyset$ и потому $\int_{D_R} \omega_1 \chi_n dy = 0$. В силу предположения $m\Lambda(G_0) = 0$ множество указанных $\omega \in C_0^\infty(D_R)$ плотно в $L_2(D_R)$ и, используя еще равномерную сходимость $f_n(z)$ к $f_0(z)$ на компактах из K_r , из (*) получим, что $\chi_0(y)$ — характеристическая функция области $f_0(K_r)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} mf_n(K_r) = mf_0(K_r)$. Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} mf_n(U_1) = m(C \setminus \overline{f_0(U)})$, что вместе с неравенством (4) из (6) и леммой 1 дает непрерывность отображения τ в точке φ_0 .

Теперь уже можно получить утверждение теоремы. Если бы для всех граничных групп G_0 , соответствующих точкам $\varphi_0 \in \partial T(G)$, выполнялось равенство $m\Lambda(G_0) = 0$, то отображение τ должно было быть непрерывным на $\partial T(G)$ (и даже в $\overline{T(G)}$ (6)). Но известно (3, 4), что параболические группы образуют множество $e \subset \partial T(G)$ положительной (топологической) коразмерности, а, следовательно, точки $\varphi_0 \in \partial T(G)$, соответствующие вырожденным G_0 , всюду плотны в $\partial T(G)$. Отсюда следует, что τ не может быть непрерывным всюду в $\partial T(G)$, так как в точках $\varphi_0 \in e$ имеем

* Заметим, что для неравенства (4) в (6) в общем случае требуется, чтобы $h(y) = 0$ вне некоторого круга $|y| \leq \delta(a)$; для функций u_φ это выполняется автоматически.

$\|\tau(\varphi_0)\|_{w_{2;\sigma}^1} > 0$, а в точках $\varphi_0 \in \partial T(G) \setminus e$ всегда $\tau(\varphi_0) = 0$. Это доказывает теорему.

Ясно, что группы, для которых выполняется утверждение теоремы, после их продолжения в E_3^+ имеют фундаментальный полиэдр с бесконечным числом граней, и мы получаем также новое доказательство существования конечно-порожденных групп с таким свойством.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
29 X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ L. V. Ahlfors, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 55, № 2, 231 (1966). ² L. V. Ahlfors, Ann. Math. Stud., № 66, 19 (1971). ³ L. Bers, Ann. Math., 91, № 3, 570 (1970). ⁴ B. Maskit, Ann. Math., 91, № 3, 607 (1970). ⁵ L. Greenberg, Ann. Math., 84, № 3, 433 (1966). ⁶ С. Л. Крушкaль, ДАН, 205, № 4, 771 (1972).