

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, А. Г. БУХГЕЙМ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Пусть $\Gamma(x, v) = \{\xi \in R^n: \varphi(\xi, x, v) = 0\}$ — гладкая ориентировочная гиперповерхность, проходящая через точку x и имеющая в этой точке нормаль v (не ограничивая общности, можно считать, что $|D_\xi \varphi| = 1$). Пусть далее $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область и $u \in C_0(\Omega)$. Рассмотрим уравнение

$$\int_{\Gamma(x, v)} u d\sigma = v(x, v), \quad x \in \Omega, \quad v \in S; \quad (1)$$

здесь S — единичная сфера в R^n , $d\sigma$ — эвклидов элемент поверхности $\Gamma(x, v)$.

Задача. По функции $v(x, v)$ восстановить функцию u .

Замечание. В указанной постановке задача (1) переопределена, так как по функции $2n-1$ переменных мы восстанавливаем функцию n переменных. Однако, если для семейства Γ гиперповерхностей, по которому происходит интегрирование в задаче интегральной геометрии, выполнено условие $\forall x \in \Omega, \forall v \in S$ существует единственная $\Gamma(x, v) \in \Gamma$, то мы приходим к задаче (1) и переопределенность может быть устранена. Ограничимся двумя примерами.

1) $\varphi(\xi, x, v) = \langle \xi - x, v \rangle$, т. е. $\Gamma(x, v)$ — плоскости. Это классическая задача Радона (см., например, ⁽¹⁾), и функция v зависит на самом деле от n независимых параметров.

2) Пусть Γ — семейство гиперповерхностей, которое получается в результате параллельного переноса в пространстве произвольного строго выпуклого тела с гладкой границей. Так как положение этого тела в пространстве однозначно определяется своим центром тяжести, то семейство $\Gamma(x, v)$ зависит фактически от n параметров. Например, если указанное тело есть единичный шар, то $\Gamma(x, v): \varphi(\xi, x, v) = \langle \xi - x, v \rangle + + 1/2 |\xi - x|^2 = 0$ — семейство единичных сфер, которое однозначно определяется своим центром $z = x - v$. Задача восстановления функции через интегралы от нее по сферам единичного радиуса изучалась Джоном ⁽²⁾.

2. Переходим к решению уравнения (1). Усредняя (1) по всем $v \in S$, получим

$$\int \frac{K(\xi, x)}{|\xi - x|} u(\xi) d\xi = v_1(x), \quad (2)$$

где

$$v_1(x) = \int_{|v|=1} v(x, v) d\omega_v,$$

$$K(\xi, x) = \int_{|v|=1} \delta \left(\frac{\varphi(\xi, x, v)}{|\xi - x|} \right) d\omega_v,$$

$d\omega_v$ — элемент телесного угла в R^n , δ — функция Дирака.

По формуле Тейлора

$$\varphi(\xi, x, v) = \langle \xi - x, v \rangle + \langle A(\xi, x, v)(\xi - x), (\xi - x) \rangle,$$

где A — матрица вторых производных.

Пусть

$$\|A\|_C = \sup_{\substack{\xi, x \in \Omega \\ v \in S}} \|A(\xi, x, v)\|, \quad \|A\| = \sup_{z \in R^n} \frac{\langle Az, Az \rangle}{\langle z, z \rangle},$$

$$\|D_v A\|_C^2 = \sum_{j=1}^n \|A'_{v_j}\|_C^2.$$

Лемма. Если $\varphi \in C^3(\Omega \times \Omega \times S)$ и $\|A\|_C \leq \delta/d(\Omega)$, $\|D_v A\|_C \leq \delta/d(\Omega)$, где $\delta < 1$ и $d(\Omega)$ — диаметр Ω , то $K(\xi, x) \in C(\Omega \times \Omega)$ и $K(x, x) = \omega_{n-1}$ — площадь единичной сферы в R^{n-1} . Если дополнительно предположить, что $\varphi \in C^{m+3}(\Omega \times \Omega \times S)$, то при $\xi \neq x$ ядро $K(\xi, x)$ имеет непрерывные производные по x до порядка m , причем

$$|D_x^\alpha K(\xi, x)| \leq \frac{C_\alpha}{|\xi - x|^{|\alpha|-1}}, \quad 1 \leq |\alpha| \leq m.$$

В дальнейшем для простоты ограничимся нечетномерным пространством R^n . Применяя к (2) оператор $\Delta^{(n-1)/2}$ (Δ — оператор Лапласа), мы получим интегральное уравнение второго рода, которое по лемме имеет слабую особенность. Итак, справедлива

Теорема 1. Если $\varphi \in C^{n+2}(\Omega \times \Omega \times S)$, $v_1(x) \in C^{n-1}(\Omega)$ и $d(\Omega) < \varepsilon$, $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma)$, то уравнение (2) имеет единственное решение $u \in C(\Omega)$.

Замечание 1. В четномерном пространстве справедлива аналогичная теорема, только в этом случае для сведения уравнения (1) к уравнению второго рода нужно применить оператор Лапласа в дробной степени.

3. Уравнение (1) можно рассматривать как систему операторных уравнений первого рода в $L_2(\Omega)$:

$$A_v u = v_v, \quad v \in S,$$

$$(A_v u)(x) = \int_{\Gamma(x, v)} u \, d\sigma.$$

Предположим, что функции $g(v) = (A_v u, h)_{L_2(\Omega)}$ аналитические на S , $\forall u \in C_0(\Omega)$, $\forall h \in H$, $H = L_2(\Omega)$ (в качестве H можно взять, например, многочлены). Пусть далее множество $\omega \subset S$ обладает тем свойством, что любая аналитическая на S функция, равная нулю на ω , равна нулю тождественно. Тогда в условиях теоремы 1 функция u определяется однозначно по функциям $v(x, v)$, $x \in \Omega$, $v \in \omega$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
15 III 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, обобщенные функции, в. 5, М., 1962. ² Ф. Йон, Плоские волны и сферические средние, ИЛ, 1958.