Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 517.95 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. МАЗЬЯ

О ЗАДАЧЕ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ОБЛАСТИ ТИПА ПОЛИЭДРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 X 1972)

В этой работе изучается эллиптическая задача с косой производной в n-мерной области, локально диффеоморфной полиэдру. Указан способ построения некоторого весового пространства, в котором задача однозначно разрешима. Тем самым обобщается один из результатов статьи ([1]), где предполагалось, что граница области содержит непересекающиеся гладкие $(n-2)$-мерные ребра. Отметим, что если в ([1]) основным моментом доказательства было сведение «модельной задачи» к задаче Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами, то здесь важную роль играет некоторая модификация принципа максимума. Мы существенно используем также факты теории общих эллиптических краевых задач на многообразиях с особенностями.

1°. Область, оператор краевой задачи. Пусть Ω — связное открытое подмножество n-мерного риманова многообразия $\mathscr{R}$ класса C^1 с компактным замыканием $\overline{\Omega}$ и границей $\partial\Omega$. Предположим, что множество $\overline{\Omega}$ локально C^2-диффеоморфно полиэдру. Будем называть гранями Ω гладкие открытые компоненты $\partial\Omega$ коразмерности 1; объединение граней обозначим через $\partial_1\Omega$. Множество $\partial\Omega\setminus\partial_1\Omega$ (особое подмножество $\partial\Omega$) представляет собой объединение конечного числа непересекающихся открытых связных подмногообразий $\mathscr{R}$ класса C^2 (стратов). Граница каждого страта есть объединение стратов меньших размерностей. Множество всех стратов, границы которых содержат страт T, называется звездой $\operatorname{st} T$ этого страта.

Пусть на каждой грани F определено единичное векторное поле $\mathbf{l}$ такое, что $(\mathbf{l}, \mathbf{n}) \geqslant \text{const} > 0$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к F, направленная во внешность Ω. Поле нормалей продолжается по непрерывности на ∂F. Предположим, что в каждой точке $\zeta \in \partial F$ существует предел $\mathbf{l}(\zeta; \mathbf{n}(\zeta)) = \lim \mathbf{l}(\eta)$ при $\eta \to \zeta$, $\eta \in F$.

Обозначим через L дифференциальный оператор $\mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_0$, где $\mathscr{A}_2$ — оператор Лапласа в $\mathscr{R}$, $\mathscr{A}_1$ — оператор первого порядка с непрерывными в $\overline{\Omega}$ вещественными коэффициентами, $\mathscr{A}_1 1 = 0$, $\mathscr{A}_0$ — непрерывная в $\overline{\Omega}$ неположительная функция. Будем изучать оператор задачи с косой производной $\{L \text{ в } \Omega, \partial/\partial l \text{ на } \partial_1\Omega\}$.

2°. Модельные операторы в конусе и на сфере. Зафиксируем страт T размерности d_T и точку $\zeta \in \overline{T}$. Если $\zeta \in T$, то через $\mathscr{N}(\zeta, T)$ обозначим $(n-d_T)$-мерное эвклидово пространство, нормальное к T в точке ζ, и через $\mathscr{K}(\zeta)$ — касательный конус к Ω в той же точке. Очевидно, $\mathscr{K}(\zeta) = R^{d_T} \times K(\zeta, T)$, где $K(\zeta, T)$ — $(n-d_T)$-мерный конус («многогранный угол») в пространстве $\mathscr{N}(\zeta, T)$. Пусть $\partial_1 K(\zeta, T)$ — объединение граней $K(\zeta, T)$. Каждая из этих граней касается в точке ζ грани Ω. Внешние нормали $\mathbf{v}(\eta)$ к $\partial K(\zeta, T)$ в точках η любой из граней $K(\zeta, T)$ параллельны нормали $\mathbf{n}(\zeta)$ к соответствующей грани Ω в точке ζ. Определим в точках $\eta \in \partial_1 K(\zeta, T)$ единичные векторы $\boldsymbol{\gamma}(\zeta, T; \mathbf{v}(\eta))$, параллельные проекциям векторов $\mathbf{l}(\zeta, \mathbf{n}(\zeta))$ на $\mathscr{N}(\zeta, T)$. Для $\zeta \in \partial T$

множества $\mathcal{N}(\zeta, T)$, $K(\zeta, T)$ и векторы $\gamma(\zeta, T; \mathbf{v}(\eta))$ вводятся как пределы $\mathcal{N}(\chi, T)$, $K(\chi, T)$ и $\gamma(\chi, T, \mathbf{v}(\eta))$ при $\chi \to \zeta$, $\chi \in T$.

Конус $K(\zeta, T)$ можно представить как прямое произведение $(0, +\infty) \times G(\zeta, T)$, где $G(\zeta, T)$ — подобласть $(n-d-1)$-мерной сферы $\mathcal{S}(\zeta, T) = \{\eta \in \mathcal{N}(\zeta, T) \colon |\eta| = 1\}$. Множество $\overline{G}(\zeta, T)$ локально C^2-диффеоморфно $(n - d_T - 1)$-мерному полиэдру и стратифицировано в том же смысле, что и $\overline{\Omega}$. Гранями и стратами $\overline{G}(\zeta, T)$ являются пересечения граней и стратов $K(\zeta, T)$ со сферой $\mathcal{S}(\zeta, T)$. Пусть $\partial_1 G(\zeta, T)$ — объединение граней области $G(\zeta, T)$.

В дальнейшем мы иногда не будем отмечать зависимость от ζ и T в обозначениях $K(\zeta, T)$, $G(\zeta, T)$ и т. п.

Рассмотрим оператор $\Delta_\eta - 1$ ($\eta \in R^{n-d_T}$ и Δ_η — оператор Лапласа) в конусе K, а также определенный на $\partial_1 K$ оператор $\gamma(\mathbf{v}(\eta))$, $\nabla_\eta)$. Последний можно записать в виде

$$\gamma_\nu \rho^{-1} \partial / \partial \nu + \gamma_\rho \partial / \partial \rho + \rho^{-1} \mathcal{D},$$

где $\rho = |\eta|$; γ_ν и γ_ρ — нормальная и радиальная составляющие вектора γ; $\mathcal{D}$ — вещественный дифференциальный оператор первого порядка на гранях области G. «Модельный» оператор задачи с косой производной $\{\Delta - 1, \partial / \partial \gamma\}$ в конусе K обозначим через $Q(\zeta, T)$.

Применяя к операторам Δ и $\partial / \partial \gamma$ преобразование Меллина, получаем зависящий от комплексного параметра λ оператор краевой задачи

$$\mathcal{P}_\lambda(\zeta, \ T) = \{\delta + \lambda(\lambda + n - d_T - 2) \ \text{ в } \ G, \quad \gamma_\nu \partial / \partial \nu + \mathcal{D} + \lambda \gamma_\rho \ \text{ на } \ \partial_1 G\},$$

где δ — оператор Лапласа на сфере $\mathcal{S}$.

3°. Функциональные пространства. С каждым стратом $T \subset \partial\Omega$ свяжем вещественное число β_T и обозначим через $\mathcal{B}$ набор всех β_T. Пусть m — целое неотрицательное число. Введем пространство $\mathcal{H}^m_{\mathcal{B}}(\Omega)$ функций в Ω, норма в котором (в локальной записи) имеет вид

$$\Big(\sum_{|\mu|=0}^{m} \int_{\Omega} |\partial^\mu u|^2 \sum_{\{T\}} r_T^{2(|\mu|-m)} \prod_{\{T\}} r_T^{2\beta_T} dx \Big)^{1/2},$$

где μ — мультииндекс $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\partial^\mu = \partial^{|\mu|} / \partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n}$, $\{T\}$ — множество всех стратов $\partial\Omega$, r_T — расстояние от точки интегрирования до страта T. Через $\mathcal{H}^{m-1/2}_{\mathcal{B}}(\partial\Omega)$, где $m \geqslant 1$, обозначим пространство предельных значений функций из $\mathcal{H}^m_{\mathcal{B}}(\Omega)$ на гранях Ω.

Пусть $\mathcal{B}(\operatorname{st} T)$ — совокупность показателей β_R стратов R звезды страта T. Приписывая точке $\zeta \in \overline{T}$ показатель β_T, а остальным стратам конуса $K(\zeta, T)$ — показатели соответствующих стратов звезды T, получим набор $\mathcal{B}(K) = \{\beta_T, \mathcal{B}(\operatorname{st} T)\}$.

Каждому страту границы области $G(\zeta, T)$ припишем показатель соответствующего страта звезды T и для набора показателей стратов $\partial G(\zeta, T)$ воспользуемся уже введенным обозначением $\mathcal{B}(\operatorname{st} T)$.

Наряду с $\mathcal{H}^m_{\mathcal{B}}(\Omega)$ будем использовать определяемые аналогично пространства $\mathcal{H}^m_{\mathcal{B}(K)}(K)$ и $\mathcal{H}^m_{\mathcal{B}(\operatorname{st} T)}(G)$, а также пространство $\mathcal{E}^m_{\mathcal{B}(K)}(K) = \mathcal{H}^m_{\mathcal{B}(K)}(K) \cap \mathcal{H}^0_{\mathcal{B}(K)}(K)$. Введем еще пространства граничных значений $\mathcal{E}^{m-1/2}_{\mathcal{B}(K)}(\partial K)$ и $\mathcal{H}^{m-1/2}_{\mathcal{B}(\operatorname{st} T)}(\partial G)$.

4°. Корректные наборы показателей. Будем говорить, что набор $\mathcal{B}(\operatorname{st} T)$ принадлежит первому классу, если каждый показатель β_R этого набора больше $2 - 1/2(n - d_R)$ или если $\operatorname{st} T = \phi$. Ко второму классу отнесем наборы $\mathcal{B}(\operatorname{st} T)$, в которых хотя бы один показатель β_R не превосходит $2 - 1/2(n - d_R)$.

Назовем набор $\mathcal{B}(\operatorname{st} T)$ первого класса корректным, если выполнены следующие два условия:

α) какова бы ни была точка $\zeta \in \overline{T}$, оператор $\mathscr{P}_\lambda(\zeta, T)$ при всех λ, кроме дискретного множества вещественных чисел, есть изоморфизм $\mathscr{H}^2_{\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)}(G) \approx \mathscr{H}^0_{\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)}(G) \times \mathscr{H}^{1/2}_{\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)}(\partial G)$;

β) для всех $\zeta \in \overline{T}$ точка $\lambda = 0$ — простое собственное число оператора $\mathscr{P}_\lambda$ (с собственной функцией 1).

Набор $\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)$ второго класса называется корректным, если он удовлетворяет условию α) и если

γ) для всех $\zeta \in \overline{T}$ существует непрерывный обратный $\mathscr{P}_0^{-1}$.

Лемма 1. *Если $\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)$ — корректный набор первого класса, то решение $\Psi \in \mathscr{H}^0_{-\mathscr{B}}(G)$ сопряженной задачи $\mathscr{P}_0^*\Psi = 0$ (т. е. задачи $\delta\Psi = 0$ в G, $\gamma_\nu \partial\Psi / \partial\nu - \mathscr{D}\Psi = (2 - n + d_T)\gamma_\rho\Psi$ на ∂G), нормированное равенством*

$$\int_G \Psi\, dm_{n-d_T-1} = 1,$$

положительно в G.

Пусть $\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)$ — корректный набор первого класса и Ψ — функция, определенная в лемме 1. Введем функцию

$$\overline{T} \ni \zeta \to \varphi_T(\zeta) = \int_{\partial G} \frac{\gamma_\rho}{\gamma_\nu} \Psi\, dm_{n-d_T-2}.$$

Для $(n-2)$-мерных стратов T функция $\varphi_T(\zeta)$ вычисляется явно. Пусть $\omega(\zeta)$ — раствор угла $K(\zeta, T)$, $\mathbf{v}_{1,2}(\zeta)$ — направления внешних нормалей к сторонам K, $\boldsymbol{\gamma}_{1,2}(\zeta)$ — соответствующие значения поля $\boldsymbol{\gamma}$ на ∂K. Обозначим через $\tau_{1,2}(\zeta)$ углы между $\mathbf{v}_{1,2}(\zeta)$ и $\boldsymbol{\gamma}_{1,2}(\zeta)$, отсчитываемые от $\mathbf{v}_{1,2}(\zeta)$ к $\boldsymbol{\gamma}_{1,2}(\zeta)$, $|\tau_{1,2}(\zeta)| < \pi/2$. Тогда $\Psi = 1/\omega(\zeta)$ и

$$\varphi_T(\zeta) = \operatorname{tg}\tau_1(\zeta) + \operatorname{tg}\tau_2(\zeta).$$

Пусть набор $\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)$ корректен и $\zeta \in \overline{T}$. Обозначим через $\lambda_T^+(\zeta)$ и $\lambda_T^-(\zeta)$ первые положительное и отрицательное собственные числа оператора $\mathscr{P}_\lambda$. Для $(n-2)$-мерного страта T

$$\lambda_T^{\pm}(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{\tau_1(\zeta) + \tau_2(\zeta)}{\omega(\zeta)}, & \text{если } \varphi_T(\zeta) \gtrless 0, \\ \dfrac{\tau_1(\zeta) + \tau_2(\zeta) \pm \pi}{\omega(\zeta)}, & \text{если } \varphi_T(\zeta) \lessgtr 0. \end{cases}$$

5°. Сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{U}$ — окрестность некоторой точки страта T, $\overline{\mathscr{U}} \cap \partial T = \phi$, и u — непрерывная в $\overline{\Omega} \cap \mathscr{U}$ функция, удовлетворяющая уравнению $Lu = 0$ на $\mathscr{U} \cap \Omega$ и краевому условию $\partial u / \partial l = 0$ на $\mathscr{U} \cap \partial_1\Omega$, $u \neq \mathrm{const}$.*

Если $\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)$ — корректный набор первого класса и $\varphi_T(\zeta) < n - d_T - 2$ на $\overline{T}$, то u не принимает локальных экстремальных значений в точках страта T.

Лемма 3. *Если $\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)$ — корректный набор первого класса $\varphi_T(\zeta) < n - d_T - 2$ и*

$$2 - \frac{1}{2}(n - d_T) < \beta_T + \sum_{R \in \mathrm{st}\, T} \beta_R < 2 - \frac{1}{2}(n - d_T) - \lambda_T^-(\zeta) \qquad (1)$$

на $\overline{T}$, то оператор $Q(\zeta, T)$: $\mathscr{E}^2_{\mathscr{B}(K)}(K) \to \mathscr{E}^0_{\mathscr{B}(K)}(K) \times \mathscr{E}^{1/2}_{\mathscr{B}(K)}(K)$ является изоморфизмом.

Лемма 4. *Пусть S — страт $\partial\Omega$. Если для любого страта $T \subset \mathrm{st}\, S$ набор $\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)$ корректен, $\varphi_T(\zeta) < n - 2 - d_T$ и выполнены неравенства (1) при всех $\zeta \in \overline{T}$, то набор $\mathscr{B}(\mathrm{st}\, T)$ корректен.*

Лемма 5. *Если* $\mathscr{B}(\operatorname{st} T)$ — *корректный набор первого класса,* $\varphi_T(\zeta) > n-2-d_T$ *и*

$$2-\frac{1}{2}(n-d_T)-\lambda_T^+(\zeta)<\beta_T+\sum_{R\in \operatorname{st} T}\beta_R<2-\frac{1}{2}(n-d_T) \qquad (2)$$

на $\overline{T}$, *то оператор* $\mathfrak{A}(\zeta, T)$: $\mathscr{E}^2_{\mathscr{B}(K)}\to\mathscr{E}^0_{\mathscr{B}(K)}(K)\times\mathscr{E}^{1/2}_{\mathscr{B}(K)}(K)$ *является изоморфизмом.*

6°. Теорема о разрешимости. Опишем способ построения набора $\mathscr{B}$, для которого задача с косой производной разрешима в $\mathscr{H}^2_{\mathscr{B}}(\Omega)$. Применим индукцию по размерности стратов. Пусть сначала T — любой $(n-2)$-мерный страт $\partial\Omega$. Предположим, что для всех $\zeta\in\overline{T}$ либо $\varphi_T(\zeta)<0$, либо $\varphi_T(\zeta)>0$. В первом случае потребуем, чтобы показатель β_T удовлетворял неравенствам $1<\beta_T<1-\lambda_T^-(\zeta)$ при всех $\zeta\in\overline{T}$, а во втором — неравенствам $1-\lambda_T^+(\zeta)<\beta_T<1$. Тогда набор $\mathscr{B}(\operatorname{st} T)$ для любого $(n-3)$-мерного страта T является корректным. Предположим, что все показатели стратов R размерностей $d_R=n-2, n-3, \ldots, k+1$ определены так, что для произвольного k-мерного страта T набор $\mathscr{B}(\operatorname{st} T)$ корректен. Если $\mathscr{B}(\operatorname{st} T)$ — набор первого класса, то показатель β_T подчиним условию (1) в случае $\varphi_T(\zeta)<n-k-2$ и условию (2) в случае $\varphi_T(\zeta)>n-k-2$. Для набора $\mathscr{B}(\operatorname{st} T)$ второго класса положим

$$2-\frac{1}{2}(n-k)-\lambda_T^+(\zeta)<\beta_T+\sum_{R\in \operatorname{st} T}\beta_R<2-\frac{1}{2}(n-k)-\lambda_T^-(\zeta)$$

при всех $\zeta\in\overline{T}$. При таком выборе показателей стратов размерностей $n-2,\ldots,k+1$, k наборы $\mathscr{B}(\operatorname{st} T)$ для $(k-1)$-мерных стратов T корректны. Если при продолжении этого процесса каждая функция $\varphi_T(\zeta)$ не принимает значения $n-d_T-2$, то можно определить показатели всех стратов $\partial\Omega$.

В следующей теореме заключен основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $\mathscr{B}=\{\beta_T\}$ — *напор показателей, полученный в результате только что описанной процедуры. Если* 1) $\mathscr{A}_0\neq 0$ *в* Ω *или* 2) $\mathscr{A}_0=0$ *и* $\beta_T\geqslant n-d_T-2$ *хотя бы для одного страта* T, *то оператор* $\{L, \partial/\partial l\}$ *осуществляет изоморфизм* $\mathscr{H}^2_{\mathscr{B}}(\Omega)\approx\mathscr{H}^0_{\mathscr{B}}(\Omega)\times\mathscr{H}^{1/2}_{\mathscr{B}}(\partial\Omega)$.

Если $\mathscr{A}_0=0$ *и* $\beta_T<n-d_T-2$ *для всех стратов* T, *то задача* $Lv=0$, $\partial v/\partial l=0$ *на* $\partial_1\Omega$ *имеет в* $\mathscr{H}^2_{\mathscr{B}}(\Omega)$ *только тривиальное решение* $v=\mathrm{const}$.

Это утверждение обобщает теорему 1 работы [1], доказанную в предположении, что $d_T=n-2$ для всех стратов T, и содержащую условия обратимости оператора $\{L-\lambda, \partial/\partial l\}$ при достаточно больших положительных λ.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
25 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Функц. анализ и его приложения, 5, в. 3, 102 (1971).