Доклады Академии наук СССР
1973. Том 211, № 1

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

Л. МЕДНИКОВ

СТАБИЛЬНЫЕ И БИСТАБИЛЬНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 1 XI 1972)

Гомеоморфизм * $f: X \to X$ называют стабильным, если его можно представить в виде композиции $f = f_1 \circ \ldots \circ f_k$ гомеоморфизмов f_i, каждый из которых тождествен на некотором непустом открытом множестве. Мы рассматриваем вопрос: для каких топологических пространств число «множителей» f_i в представлении каждого стабильного гомеоморфизма f можно сократить до двух, т. е. когда каждый стабильный гомеоморфизм является бистабильным. Для несвязных пространств это всегда можно сделать. В данной статье этот вопрос решается положительно для некоторых классов связных топологических (мы рассматриваем лишь хаусдорфовы) пространств, в частности, для всех топологических векторных пространств, всех тихоновских кубов и некоторых их подпространств.

1. Сильная локальная однородность топологических векторных пространств.

Определение 1. Множество U топологического пространства X называется сильно однородным, если для любых его двух точек x и y существует такой гомеоморфизм $h: X \to X$, что $h(x) = y$ и $h|_{X \setminus U} = \mathrm{id}$ **.

Пространство X называется сильно локально однородным, если его сильно однородные открытые множества составляют базу.

Определение 2. Топологическое пространство X назовем локально однородным в точке x, если для любой окрестности U этой точки найдется такая ее окрестность $Ox \subset U$, что для любой точки $y \in Ox$ существует гомеоморфизм $h \in H(X)$ ***, подчиняющийся условиям $h(x) = y$ и $h|_{X \setminus U} = \mathrm{id}$.

Пространство X назовем слабо локально однородным, если оно локально однородно в каждой своей точке.

Лемма 1. *Если топологическое пространство локально однородно во всякой точке связного открытого множества U, то U — сильно однородное множество.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы и $u \in U$. Множество

$$W_u = \{x \in U \mid \exists \text{ такое } h' \in H(X), \text{ что } h'(u) = x \text{ и } h'|_{X \setminus U} = \mathrm{id}\}$$

открыто-замкнуто в U. В самом деле, по условию леммы в точке $x \in W_u \subset U$ можно найти окрестность Ox и гомеоморфизм h, удовлетворяющие определению 2. Тогда для гомеоморфизма h', взятого из определения множества W_u, получим: $h'(h(u)) = y$ и $h' \circ h|_{X \setminus U} = \mathrm{id}$. Таким образом, $Ox \subset W_u$. Значит, W_u открыто. Пусть теперь $x \in U \setminus W_u$. Можно найти окрестность Ox, удовлетворяющую определению 2. Ясно, что $Ox \subset U \setminus W_u$. Значит, W_u замкнуто в U. Отсюда $W_u = U$ для любой точки $u \in U$, так как множество U связно. Поэтому множество U сильно однородно.

---

* Гомеоморфизмами мы называем гомеоморфизмы пространства X на себя.

** id означает тождественный гомеоморфизм.

*** $H(X)$ означает множество всех гомеоморфизмов пространства X.

Следствие. *Если слабо локально однородное топологическое пространство локально связно, то оно сильно локально однородно.*

Далее нам понадобятся следующие обозначения для множеств и действий над ними в векторных пространствах:

$$I(x, y) = \{z \mid z = tx + (1-t)y, \quad \text{где } 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$

$$A + B = \{z \mid z = a + b, \text{ где } a \in A \text{ и } b \in B\},$$

$$T \cdot U = \{z \mid z = t \cdot u, \quad \text{где } t \in T \text{ и } u \in U\}.$$

Определение 3. Окрестность U нуля топологического векторного пространства называется сжимаемой, если $[0, 1)\overline{U} \subset U$ *.

В [3] доказаны следующие два утверждения.

Теорема К (Klee). *Во всяком топологическом векторном пространстве сжимаемые окрестности образуют базу этого пространства в нуле.*

Лемма К (Klee). *Если U — сжимаемая окрестность нуля, то и $U + I(o, x)$ ** — сжимаемая окрестность нуля для любого $x \in X$.*

Теорема 1. *Для любой сжимаемой окрестности U нуля в топологическом векторном пространстве X и любых двух таких чисел α и β, что $0 < \alpha < 1 < \beta$, существует гомеоморфизм $h \in H(X)$, удовлетворяющий условиям $h(x) = \alpha x$, если $x \in \overline{U}$, и $h(x) = x$, если $x \notin \beta U$.*

Доказательство. Заметим, что если $0 < t < t'$, то $tU \subset t\overline{U} \subset t'U$. Рассмотрим отображение μ: $X \to R$, заданное формулой

$$\mu(x) = \inf\{t > 0,\ x \in tU\}.$$

Легко проверить, что

$$\mu(tx) = t\mu(x), \quad \mu^{-1}[0, t) = \bigcup_{t' < t} t'U, \quad \mu^{-1}(t, \infty) = \bigcup_{t' > t} (X \setminus \overline{t'U})$$

при любом t.

Следовательно, μ непрерывно.

Рассмотрим гомеоморфизм φ: $[1, \beta] \to [\alpha, \beta]$, при котором $\varphi(1) = \alpha$, а $\varphi(\beta) = \beta$.

Рассмотрим непрерывное отображение h: $X \to X$, определенное следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} \alpha x, & \text{если } \mu(x) \leqslant 1, \\ \dfrac{\varphi(\mu(x))}{\mu(x)} x, & \text{если } 1 \leqslant \mu(x) \leqslant \beta, \\ x, & \text{если } \beta \leqslant \mu(x). \end{cases}$$

Заметим, что если $1 \leqslant \mu(x) \leqslant \beta$, то $\mu(h(x)) = \mu\left(\dfrac{\varphi(\mu(x))}{\mu(x)} \cdot x\right) = \varphi(\mu(x))$.

Докажем, что непрерывное отображение g: $X \to X$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} x, & \text{если } \mu(x) \leqslant \alpha, \\ \dfrac{\varphi^{-1}(\mu(x))}{\mu(x)} x, & \text{если } \alpha \leqslant \mu(x) \leqslant \beta, \\ x, & \text{если } \beta \leqslant \mu(x), \end{cases}$$

обратно к h. В самом деле, если $1 \leqslant \mu(x) \leqslant \beta$, то $\alpha \leqslant \mu(h(x)) \leqslant \beta$ и

$$g(h(x)) = \frac{\varphi^{-1}(\mu(h(x)))}{\mu(h(x))} h(x) = \frac{\varphi^{-1}(\varphi(\mu(x)))}{\varphi(\mu(x))} \frac{\varphi(\mu(x))}{\mu(x)} x = \frac{\mu(x)}{\mu(x)} x = x.$$

Аналогично доказывается, что $h(g(x)) = x$.

---

* $\overline{U}$ означает замыкание множества U в пространстве X.

** o означает нуль топологического векторного пространства.

Так как g обратно к h, то h — гомеоморфизм. А так как $\overline{U} \subset \mu^{-1}[0, 1]$, $X \setminus \beta U \subset \mu^{-1}[\beta, \infty)$, то h — искомый гомеоморфизм.

Следствие. *Пусть W — сжимаемая окрестность нуля, u, $v \in W$, причем $v = tu$ при $t > 1$. Тогда существует такой гомеоморфизм $h' \in H(X)$, что $h'(u) = v$ и $h'|_{X \setminus W} = \mathrm{id}$.*

Доказательство. Так как W открыто, то существует $t' > 1$ такое, что $t'v \in W$. Положив $\alpha = \frac{1}{t}$, $\beta = t'$, $U = \frac{1}{t'} W$ и применив теорему 1, получим гомеоморфизм, обратный к искомому.

Теорема 2. *Всякое топологическое векторное пространство X сильно локально однородно.*

Доказательство. В силу следствия к лемме 1 достаточно доказать, что X слабо локально однородно. Пусть U — открытое множество этого пространства и $x \in U$. В силу теоремы К найдется такая сжимаемая окрестность V нуля, что $V + V + x \subset U$. Пусть $y \in V + x$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $I(o, \varepsilon(x - y)) \subset V$. Можно считать, что $x + \varepsilon(x - y) = o$ (если это не так, то произведем сдвиг).

Рассмотрим окрестность W нуля: $W = V + I(o, x)$. По лемме К W сжимаема. Так как $y \in W$ и $y = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} x$, то по следствию теоремы 1 найдется такой гомеоморфизм $h' \in H(X)$, что $h'(x) = y$ и $h'|_{X \setminus W} = \mathrm{id}$. Так как $W = V + I(o, \varepsilon(x - y)) + x \subset V + V + x \subset U$, то $h'|_{X \setminus U} = \mathrm{id}$.

В работе [2] доказана

Теорема E (Eberhart). *Бесконечномерный тихоновский куб сильно локально однороден.*

2. Стабильные и бистабильные гомеоморфизмы.

Определение 4. Гомеоморфизм $f \in H(X)$ называется закрепленным, если он тождествен на некотором открытом множестве. Гомеоморфизм называется стабильным, если он представлен в виде конечной композиции закрепленных гомеоморфизмов. Гомеоморфизм называется бистабильным, если он представим в виде композиции двух закрепленных гомеоморфизмов.

Теорема 3. *Пусть X — топологическое пространство. Если для любых трех открытых множеств U_1, U_2, U_3 и для любого гомеоморфизма $f \in H(X)$ найдутся такие три точки $a_i \in U_i$ и такой гомеоморфизм $h \in H(X)$, что $h(a_1) = a_2$ и h тождествен на некоторых окрестностях точек a_3 и $f(a_3)$, то любой стабильный гомеоморфизм пространства X бистабилен.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что любой гомеоморфизм, являющийся композицией трех закрепленных гомеоморфизмов, бистабилен. Пусть $f = f_3 f_2 f_1$, где f_1, f_2, $f_3 \in H(X)$ и тождественны на открытых множествах U_1, U_2, U_3 соответственно. Согласно условию, существуют точки $a_i \in U_i$, $i = 1, 2, 3$, гомеоморфизм $h \in H(X)$ и открытое множество V такие, что $a_3 \cup f_2^{-1}(a_3) \subset V$, $h|_V = \mathrm{id}$, $h(a_1) = a_2$. Рассмотрим гомеоморфизмы $g_1 = h^{-1} f_2 h f_1$ и $g_2 = f_3 f_2 h^{-1} f_2^{-1} h$. Легко проверяется, что g_1 тождествен на $h^{-1}(U_2) \cap U_1$, а g_2 — на $V \cap f_2 V \cap U_3$. Кроме того, $f = g_2 g_1$.

Теорема 4. *Пусть X — топологическое пространство, Y — открытое плотное в X множество, слабо локально однородное в индуцированной топологии, причем для любых двух точек b, $o \in y$ дополнение $Y \setminus (b \cup c)$ связно.*

Тогда X удовлетворяет условию теоремы 3.

Доказательство. Пусть U_1, U_2, U_3 открыты в X, а $f \in H(X)$. Выберем точки $a_i \in U_i$ так, что $f(a_3) \in Y$ и $a_i \neq f(a_3)$, $a_i \neq a_3$, $i = 1, 2$. Рассмотрим множество $A = \{a \in Y|$, существует такой $h \in H(X)$, что $h(a_1) = a$ и h тождествен на некоторых окрестностях точек a_3 и $f(a_3)\}$. Так же, как в лемме 1, докажем, что A открыто-замкнуто в $Y \setminus (a_3 \cup f(a_3))$. Так как $a_1 \in A$, то $A = Y \setminus (a_3 \cup f(a_3))$. Следовательно, $a_2 \in A$.

Следствие 1. *Пусть X — топологическое векторное пространство или тихоновский куб (конечно- или бесконечномерный). Тогда любой стабильный гомеоморфизм пространства X бистабилен.*

Следствие 2. *Пусть пространство X — открытое или канонически замкнутое множество топологического векторного пространства или тихоновского куба. Тогда любой стабильный гомеоморфизм пространства X бистабилен.*

Замечание. Прямая линия не удовлетворяет условиям теорем 3 и 4. Однако легко проверяется, что любой гомеоморфизм связного подмножества прямой, не меняющий ориентацию (а, следовательно, любой стабильный гомеоморфизм), бистабилен.

В работах ([1]) и ([4]) доказаны следующие два утверждения.

Теорема A (Anderson). *Любой гомеоморфизм гильбертова куба стабилен.*

Теорема AW (Anderson, Wong). *Любой гомеоморфизм бесконечномерного сепарабельного пространства Фреше стабилен.*

Следствие. *Любой гомеоморфизм гильбертова куба (бесконечномерного сепарабельного пространства Фреше) бистабилен.*

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Ю. М. Смирнову, под руководством которого была выполнена эта работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. D. Anderson, Math. J., 14, № 3, 365 (1967). [2] C. Eberhart, Proc. Am. Math. Soc., 19, № 1. 185 (1968). [3] V. L. Klee, Math. Ann., 14, № 4, 281 (1960). [4] Raymond J. T. Wong, Trans. Am. Math. Soc., 128, № 1, 148 (1967). [5] X. Шефер, Топологические векторные пространства, М., 1971.