

УДК 517.947.42

МАТЕМАТИКА

Е. А. БАДЕРКО

О ГЛАДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ $2p$ -ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 8 XII 1972)

В исследовании краевых задач для параболических уравнений важную роль играет изучение гладкости параболических потенциалов в пространствах Гельдера, которое было начато еще в работе Жевре ⁽¹⁾. В работах Л. И. Камынина ⁽²⁾ построена систематическая теория гладкости в этих пространствах основных параболических потенциалов в случае одномерного (по x) параболического уравнения 2-го порядка. В настоящей работе исследуется гладкость в пространствах Гельдера потенциала простого слоя, плоского потенциала и потенциала типа Пуассона для одномерного параболического уравнения $2p$ -го порядка.

В области $D_T = \{(x, t): -\infty < x < +\infty, 0 < t < T\}$ рассмотрим $2p$ -параболическое уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^p a_{2p}(x, t) \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} + \sum_{k=1}^{2p} a_{2p-k}(x, t) \frac{\partial^{2p-k} u}{\partial x^{2p-k}} = 0, \quad (1)$$

где p — любое натуральное число и

а) коэффициенты L определены и ограничены в $\bar{D}_T$, при этом

$$0 < a_0 \leq a_{2p}(x, t) \leq A_0, \quad (x, t) \in \bar{D}_T;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } |a_i(x + \Delta x, t + \Delta t) - a_i(x, t)| &\leq C(|\Delta x|^\alpha + |\Delta t|^{\alpha/(2p)}), \\ 0 \leq i \leq 2p; \quad 0 < \alpha \leq 1; \quad (x, t), (x + \Delta x, t + \Delta t) &\in \bar{D}_T. \end{aligned}$$

При выполнении этих условий существует фундаментальное решение $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ уравнения (1) (см., например, ⁽³⁾). С помощью $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ для уравнения (1) строятся основные $2p$ -параболические потенциалы. В работе, при условиях а) и б), устанавливаются оценки для этих потенциалов и их производных по x до $(2p-1)$ -го порядка включительно.

Теорема 1. Если кривая $K: x = X(t)$, $0 \leq t \leq T$ непрерывна, а плотность $\varphi(t)$ интегрируема на $(0, T)$ и удовлетворяет оценке

$$|\varphi(t)| \leq [\varphi]_0 t^{\gamma-1}, \quad \gamma > 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

где $[\varphi]_0$ — постоянная, то для $2p$ -параболического потенциала простого слоя

$$U(x, t) = \int_0^t \varphi(\tau) \Gamma(x, t; X(\tau), \tau) d\tau, \quad (x, t) \in D_T,$$

имеют место следующие оценки при $(x, t), (x + \Delta x, t), (x, t + \Delta t) \in D_T$, $0 < (\Delta x)^{2p}$, $\Delta t \leq T/2$ (здесь и дальше через C , с обозначаются постоянные, зависящие от a_0, T , $\max_{(x,t) \in \bar{D}_T} |a_i(x, t)|$ и констант Гельдера $a_i(x, t)$, $0 \leq i \leq$

$\leq 2p$; кроме того, полагаем $\Delta_x f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$:

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} U(x, t) \right| \leq C [\varphi]_0 (1 + \gamma^{-1}) t^{\gamma - (1+k)/(2p)}, \quad 0 \leq k \leq 2p - 2,$$

$$(x, t) \in \bar{D}_T \quad \text{при} \quad \gamma \geq (2p - 1)/(2p);$$

$$\left| \Delta_x \frac{\partial^{2p-2}}{\partial x^{2p-2}} U(x, t) \right| \leq C [\varphi]_0 (1 + \gamma^{-1}) t^{\gamma-1} |\Delta x| \left(1 + \ln \frac{T}{2(\Delta x)^{2p}} \right); \quad (3)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial^k}{\partial x^k} U(x, t) \right| \leq$$

$$\leq C [\varphi]_0 (1 + \gamma^{-1}) t^{\gamma-(k+2)/(2p)} \begin{cases} \Delta t^{1/(2p)}, & 0 \leq k \leq 2p-3, \\ (\Delta t)^{1/(2p)} \left(1 + \ln \frac{T}{2\Delta t} \right), & k = 2p-2. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Как следует из приводимой ниже теоремы 2, если кривая K удовлетворяет условию

$$|\Delta_t X(t)| \leq [X]_* |\Delta t|^{(1+\kappa)/(2p)}, \quad 0 < \kappa \leq 2p-1, \quad 0 \leq t, t + \Delta t \leq T, \quad (4)$$

где $[X]_*$ — постоянная, при $(x, t), (x + \Delta x, t) \in D_T$ выполняется неравенство

$$\left| \Delta_x \frac{\partial^{2p-2}}{\partial x^{2p-2}} U(x, t) \right| \leq C [\varphi]_0 (1 + [X]_*) (\alpha^{-1} + \kappa^{-1} + \gamma^{-1}) t^{\gamma-1} |\Delta x|,$$

где $0 < \alpha \leq 1$ — из условия б), $U(x, t)$ — из теоремы 1 (ср. с оценкой (3)). Но если для кривой K условие (4) не выполнено, то оценку (3) теоремы 1 улучшить нельзя, а именно, справедливо

У т в е р ж д е н и е. Если потенциал $U(x, t)$ с плотностью $\varphi(t) \equiv 1$, $0 \leq t \leq T$, рассматривается на кривой

$$x = X(t) = \frac{\pi}{6} \left(\frac{a_0}{2} \right)^{1/(2p)} |1 - t|^{1/(2p)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad T > 1,$$

где $a_0 > 0$ — из условия а), то существуют такие постоянные C и c , что для всех $x, \Delta x < 0$, где $|x| < |\Delta x|$ и $|\Delta x|$ достаточно мал, имеет место неравенство

$$\left| \Delta_x \frac{\partial^{2p-2}}{\partial x^{2p-2}} U(x, 1) \right| \geq C |\Delta x| \ln \frac{c}{(\Delta x)^{2p}}.$$

Ниже для любых $0 < v \leq 2p-1$, $0 < z \leq T/2$ будем пользоваться обозначением

$$\delta_t(v, z) = \begin{cases} (1-v)^{-1} z^{v/(2p)}, & \text{если } 0 < v < 1, \\ z^{1/(2p)} \left(1 + \ln \frac{T}{2z} \right), & \text{если } v = 1, \\ (v-1)^{-1} z^{1/(2p)} t^{(v-1)/(2p)}, & \text{если } 1 < v \leq 2p-1. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. Если для плотности $\varphi(t)$ выполнено условие (2), а для кривой K — условие (4), то для $2p$ -параболического потенциала

$$V(x, t) = \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}} \Gamma(x, t; X(\tau), \tau) d\tau, \quad (x, t) \in D_T,$$

и прямых значений его на кривой K , т. е. для $\bar{V}(t) = V(X(t), t)$, $0 < t \leq T$, справедливы оценки

$$|V(x, t)| \leq C [\varphi]_0 (1 + [X]_*) (\alpha^{-1} + \kappa^{-1} + \gamma^{-1}) t^{\gamma-1}, \quad (x, t) \in D_T;$$

$$|\bar{V}(t)| \leq C [\varphi]_0 (1 + [X]_*) (\alpha^{-1} + \kappa^{-1} + \gamma^{-1}) t^{\gamma-1} (t^{\alpha/(2p)} + t^{\kappa/(2p)}), \quad 0 < t \leq T;$$

$$|\Delta_t \bar{V}(t)| \leq C [\varphi]_0 (1 + [X]_*) (\alpha^{-1} + \kappa^{-1} + \gamma^{-1}) t^{\gamma-1} [\delta_t(\alpha, \Delta t) + (\Delta t)^{\kappa/(2p)}],$$

$$0 < t, \quad t + \Delta t \leq T, \quad 0 < \Delta t \leq T/2.$$

Теорема 3. Если плотность $\varphi(t)$ интегрируема и ограничена, а кривая K непрерывна на $[0, T]$, то при $0 \leq k \leq 2p - 2$ функции

$$\int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \Gamma(x, t; X(\tau), \tau) d\tau \quad \text{непрерывны по } (x, t) \in \bar{D}_T.$$

Если $\varphi(t) \in C([0, T])$, а кривая K удовлетворяет условию (4), то имеет место формула скачка Жевре

$$\lim_{(x, t) \rightarrow (X(t), t)} V(x, t_1) = (-1)^p \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x - X(t)) a_{2p}^{-1}(X(t), t) \varphi(t) + \bar{V}(t), \quad (x, t) \in D_T^\pm,$$

где D_T^- — подобласть D_T — слева от кривой K , D_T^+ — справа от K .

Теорема 4. Пусть для плотности $\varphi(t)$ выполнено условие (2) и, кроме того,

$$|\Delta_t \varphi(t)| \leq [\varphi]_\beta t^{\gamma-1} |\Delta t|^{\beta/(2p)}, \quad \gamma_1 > 0, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad 0 < t, t + \Delta t \leq T,$$

где $[\varphi]_\beta$ — постоянная, а кривая K удовлетворяет условию (4).

Тогда при $(x, t), (x + \Delta x, t), (x, t + \Delta t) \in D_T^\pm$, $0 < (\Delta x)^{2p}$, $\Delta t \leq T/2$

$$|\Delta_x V(x, t)| \leq C |\varphi| (1 + |X|)^2 (\alpha^{-1} + \kappa^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} + \gamma_1^{-1}) [t^{\gamma-1-\beta/(2p)} |\Delta x|^\beta + t^{\gamma-1} (\delta_t(\alpha, |\Delta x|^{2p}) + \delta_t(\kappa, |\Delta x|^{2p})) + t^{\gamma_1-1} \delta_t(\beta, |\Delta x|^{2p})],$$

где $|\varphi| = [\varphi]_0 + [\varphi]_\beta$, $|X| = \max_{0 \leq t \leq T} |X(t)| + [X]_\kappa$;

$$|\Delta_t V(x, t)| \leq C |\varphi| (1 + |X|)^2 (\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \kappa^{-1} + \gamma^{-1} + \gamma_1^{-1}) [t^{\gamma-1-\beta/(2p)} (\Delta t)^{\beta/(2p)} + t^{\gamma-1} (\delta_t(\alpha, \Delta t) + (\Delta t)^{\alpha/(2p)}) + t^{\gamma_1-1} (\Delta t)^{\beta/(2p)}].$$

Теорема 5. Пусть функция $f(x, t)$ интегрируема на всяком компакте из D_T и, кроме того,

$$|f(x, t)| \leq [f]_0 t^{\gamma-1}, \quad \gamma > 0, \quad (x, t) \in D_T, \quad [f]_0 \text{ постоянная.}$$

Тогда $2p$ -параболический плоский потенциал

$$Z(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) \Gamma(x, t; \xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D_T,$$

удовлетворяет при $(x, t), (x + \Delta x, t), (x, t + \Delta t) \in D_T$, $0 < (\Delta x)^{2p}$, $\Delta t \leq T/2$, $0 \leq k \leq 2p - 1$ оценкам

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} Z(x, t) \right| \leq C [f]_0 (1 + \gamma^{-1}) t^{\gamma-k/(2p)},$$

$$(x, t) \in \bar{D}_T \quad \text{при} \quad \gamma \geq 1;$$

$$\left| \Delta_x \frac{\partial^{2p-1}}{\partial x^{2p-1}} Z(x, t) \right| \leq C [f]_0 (1 + \gamma^{-1}) t^{\gamma-1} |\Delta x| \left(1 + \ln \frac{T}{2(\Delta x)^{2p}} \right);$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial^k}{\partial x^k} Z(x, t) \right| \leq$$

$$\leq C [f]_0 (1 + \gamma^{-1}) t^\gamma \begin{cases} t^{-1} \Delta t \left(1 + \ln \frac{T}{2\Delta t} \right), & k = 0, \\ t^{-(1+k)/(2p)} (\Delta t)^{1/(2p)}, & 1 \leq k \leq 2p - 1. \end{cases}$$

Теорема 6. Пусть для фиксированного k , $0 \leq k \leq 2p - 1$, функция $h(x)$ удовлетворяет условиям

$$\left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} h(x) \right| \leq [h]_i, \quad 0 \leq i \leq k, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\left| \Delta_x \frac{\partial^k}{\partial x^k} h(x) \right| \leq [h]_{k+\beta} |\Delta x|^\beta, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad -\infty < x, \quad x + \Delta x < +\infty,$$

где $[h]_i$, $0 \leq i \leq k$; $[h]_{k+\beta}$ постоянные.

Тогда для $2p$ -параболического потенциала типа Прессона

$$z(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \Gamma(x, t; \xi, 0) d\xi, \quad (x, t) \in D_T,$$

для всех $i, 0 \leq i \leq k$, при $(x, t), (x + \Delta x, t), (x, t + \Delta t) \in D_T, \Delta t > 0$, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} z(x, t) \right| &\leq C |h|_i; \\ \left| \Delta_x \frac{\partial^k}{\partial x^k} z(x, t) \right| &\leq C |h|_{k+\beta} |\Delta x|^\beta; \\ \left| \Delta_t \frac{\partial^i}{\partial x^i} z(x, t) \right| &\leq C |h|_{i+\beta} (\Delta t)^{\beta/(2p)}, \end{aligned}$$

$$\text{где } |h|_{i+\beta} = \sum_{l=0}^i ([h]_l + |h|_{l+\beta}); \quad [h]_{l+\beta} = [h]_{l+1} \quad \text{при } 0 \leq l \leq k-1.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ M. Gevrey, J. Math. pures et appl., 9, № 1—4, 305 (1913). ² Л. И. Камынин, Дифференциальные уравнения, 7, № 2, 312 (1971); № 4, 711 (1971); № 8, 1473 (1971). ³ А. Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, М., 1968.