

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

В. К. БЕЛЬНОВ

О МЕТРИЗАЦИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

(Представлено академиком П. С. Александровым 19 XII 1972)

Пусть G — абелева группа, которую можно представить в виде $G = \sum_{\alpha \in A} Z_q^{(\alpha)}$, где $Z_q^{(\alpha)} = Z_q$ — копия циклической группы Z_q для любого $\alpha \in A$ и $q \geq 2$ — фиксированное целое число. Пусть, далее, x_α — некоторая образующая группы $Z_q^{(\alpha)}$, $\alpha \in A$, и $X = \{0\} \cup \bigcup_{\alpha \in A} \{x_\alpha\}$. Будем называть X

базой группы G , а группу G будем называть абелевой группой со слоем Z_q и базой X . Если G — свободная абелева группа с базой X (¹), то будем аналогично называть G абелевой группой со слоем Z и базой X .

Теорема 1. Пусть X — метризуемое пространство и точка $x_0 \in X$. Рассмотрим абелеву группу G с базой X и слоем Z_n , $n \geq 2$, нулевым элементом которой является точка $x_0 \in X$.

Тогда на группе G существует такая метризуемая топология ν , совместимая с групповой структурой G , что:

1) топология ν индуцирует на множестве X его первоначальную топологию;

2) множество X является замкнутым подмножеством метризуемой группы (G, ν) .

В работе (²) Р. Д. Андерсон и Дж. И. Кейслер доказывают следующее Утверждение. В n -мерном евклидовом пространстве E^n существует такое подмножество K , что $\dim K = \dim K^\circ = n - 1$ (здесь K° — произведение счетного числа экземпляров пространства K).

Используя этот результат, можно с помощью следующей теоремы строить для каждого целого $m \geq 0$ такую абелеву группу G со слоем Z или Z_n , где $n \geq 2$ — фиксированное целое число, что $\dim G = m$.

Теорема 2. Пусть K — такое метризуемое сепарабельное пространство, что $\dim K = \dim K^\circ = m$, и пусть точка $x_0 \in K$. Рассмотрим абелеву группу G с базой K и слоем Z или Z_n , где $n \geq 2$, нулевым элементом которой является точка $x_0 \in K$.

Тогда на группе G существует такая метризуемая топология ν , совместимая с групповой структурой G , что:

1) топология ν индуцирует на множестве K его первоначальную топологию;

2) множество K является замкнутым подмножеством группы (G, ν) ;

3) $\dim (G, \nu) = m$.

Теорема 3. Пусть X — локально-линейно-связное метризуемое пространство и точка $x_0 \in X$. Рассмотрим абелеву группу G с базой X и слоем Z или Z_n , где $n \geq 2$, нулевым элементом которой является точка $x_0 \in X$.

Тогда на группе G существует такая метризуемая топология ν , совместимая с групповой структурой G , что:

1) топология ν индуцирует на множестве X его первоначальную топологию;

2) множество X является замкнутым подмножеством метризуемой группы (G, ν) ;

3) группа (G, ν) локально-линейно-связна.

Следствие. Для каждого целого $n \geq 2$ существует метризуемая абелева группа G со слоем Z_n , которая локально-линейно-связна и линейно-связна.

Перейдем к построению метризуемых топологий на произвольных бесконечных абелевых группах.

Теорема 4. Пусть G — абелева группа мощности $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$.

Тогда существует $2^{\mathfrak{m}}$ линейно упорядоченных множеств $M_s = \{\mu_s^\alpha, \alpha \in (0, 1)\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{m}}$, метризуемых топологий на группе G , совместимых с ее групповой структурой и таких, что:

1) $\mu_s^{\alpha_1} < \mu_s^{\alpha_2}$, если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, $s \in S$;

2) каковы бы ни были $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, топологии $\mu_{s_1}^{\alpha_1}$ и $\mu_{s_2}^{\alpha_2}$ несравнимы, если $s_1 \neq s_2$.

3) $\dim(G, \mu_s^\alpha) = 0$ для любого $\alpha \in (0, 1)$ и любого $s \in S$.

Теорема 5. Пусть G — абелева группа, $|G| \geq \mathfrak{c}$, и пусть n — неотрицательное целое число.

Тогда существует такое семейство $\{\mu_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2\mathfrak{c}$, метризуемых топологий на группе G , совместимых с ее групповой структурой, что:

1) для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально-сепарабельна;

2) для любого $s \in S$ $\dim(G, \mu_s) = n$;

3) для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, группы (G, μ_{s_1}) и (G, μ_{s_2}) не гомеоморфны.

Теорема 6. Пусть G — абелева группа, и пусть $|G| \geq \mathfrak{c}$.

Тогда существует такое семейство $\{\mu_s\}$, $s \in S$, $|S| = 2^{\mathfrak{c}}$, метризуемых топологий на группе G , совместимых с ее групповой структурой, что:

1) для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально-сепарабельна;

2) для любого $s \in S$ группа (G, μ_s) локально-линейно-связна;

3) для любых $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, группы (G, μ_{s_1}) и (G, μ_{s_2}) не гомеоморфны.

Пусть G — абелева группа и μ — некоторая метризуемая топология на группе G , совместимая с ее групповой структурой. Будем обозначать через μG пополнение метризуемой группы (G, μ) ⁽³⁾.

Теорема 7. Пусть G — абелева группа, $G_0 \subseteq G$ — подгруппа без кручения группы G и $|G_0| = \mathfrak{m} \geq \aleph_0$.

Тогда для любой абелевой метризуемой группы (H, μ) с $w(H, \mu) \leq \mathfrak{m}$ существует такая метризуемая топология ν на группе G , совместимая с ее групповой структурой, и такое топологически изоморфное вложение $\varphi: (H, \mu) \rightarrow \nu G$ группы (H, μ) в группу νG , что $\varphi(H) \cap G = \{0\}$.

Теорема 8. Пусть G — абелева группа, $G_0 \subseteq G$ — подгруппа группы G , которая является абелевой группой со слоем Z_q , $q \geq 2$, и базой X , и пусть $|X| = \mathfrak{m} \geq \aleph_0$.

Тогда для любой абелевой метризуемой группы (H, μ) , для которой $qH = 0$ и $w(H, \mu) \leq \mathfrak{m}$, существует такая метризуемая топология ν на группе G , совместимая с ее групповой структурой, и такое топологически изоморфное вложение $\varphi: (H, \mu) \rightarrow \nu G$ группы (H, μ) в группу νG , что $\varphi(H) \cap G = \{0\}$.

Теорема 9. Пусть G — абелева группа, и пусть для некоторой возрастающей последовательности $2 \geq q_1 < q_2 < \dots < q_i < \dots$ целых чисел $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots$ существует такая последовательность подгрупп G_i группы G , что:

1) для каждого $i = 1, 2, \dots$, подгруппа G_i является абелевой группой со слоем Z_{q_i} и базой X_i ;

2) $|X_1| \leq |X_2| \leq \dots \leq |X_i| \leq \dots$

Пусть, далее, $|\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i| = \mathfrak{m}$.

Тогда для любой абелевой метризуемой группы (H, μ) , для которой $w(H, \mu) \leq \mathfrak{m}$, существует такая метризуемая топология ν на группе G , со-

вместимая с ее групповой структурой, и такое топологически изоморфное вложение $\varphi: (H, \mu) \rightarrow \nu G$ группы (H, μ) в группу νG , что $\varphi(H) \cap G = \{0\}$.

При доказательстве теорем 7–9 существенно используется следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес:

Теорема 10. Пусть (G, μ) — абелева метризуемая группа, $G_0 \subseteq G$ — замкнутая подгруппа группы G , $\mu_0 = \mu|_{G_0}$ и $\varphi_0: (G_0, \mu_0) \rightarrow (H_0, \nu_0)$ — непрерывный гомоморфизм группы (G_0, μ_0) на некоторую метризуемую группу (H_0, ν_0) . Пусть, далее, $G_1 = \ker \varphi_0$, $H = G/G_1$ и $\varphi: G \rightarrow H$ — естественный гомоморфизм.

Тогда на группе H существует такая метризуемая топология ν , совместимая с ее групповой структурой, что:

1) если отождествить каноническим образом группу H_0 с подгруппой группы H , то $\nu_0 = \nu|_{H_0}$ и (H_0, ν_0) является замкнутой подгруппой группы (H, ν) ;

2) гомоморфизм $\varphi: (G, \mu) \rightarrow (H, \nu)$ непрерывен.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
6 XII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. К. Бельнов, ДАН, 202, № 4, 743 (1972). ² R. D. Anderson, J. E. Keisler, Proc. Am. Math. Soc., 48, № 4, 709 (1967). ³ М. И. Граев, УМН, 5, в. 2, 3 (1950).

